En teori om egenskaper og mengder. Systemet MZFC

av

Morten Harboe Rognes

2011- 2013

(Basert på et håndskrevet manus fra 1977)

© 2012 Morten Harboe Rognes

§1 Innledning

Vi skal i dette arbeidet presentere, og utvikle, en teori om egenskaper som vi kaller MZFC. I grove trekk kan systemet sies å være det velkjente mengdeteoretiske systemet ZFC utvidet med modaloperatorene nødvendighet og mulighet, men med ekstensjonalitetsaksiomet fjernet. I stedet erstattes dette med et aksiom som sier at to egenskaper er identiske hvis og bare hvis det er logisk nødvendig at enhver entitet som er i besittelse av den første egenskapen også er i besittelse av den andre egenskapen og omvendt.

Imidlertid er det en rekke andre forskjeller mellom systemet MZFC og ZFC: I språket til MZFC innfører vi en egnskapsabstraksjonsoperator som en primitiv termdannende operator. MZFC inneholder derfor en rekke aksiomer som fikserer egenskapene til denne operatoren. Fordi vi innfører denne egenskapskapsabstraksjonsoperatoren har vi gitt endel av de vanlige aksiomene i ZFC, som for eksempel sumaksiomet, parmengdeaksiomet, utsondringsaksiomet og uendelighetsaksiomet en annen form en den som gis i de vanlige aksiomatiseringene av ZFC. I MZFC er også utvalgsaksiomet formulert på en annen måte enn den man er vant til fordi individuasjonsprinsippet for egenskaper er et annet enn for mengder.

Det er viktig å merke seg at i MZFC kan vi definere hva som forstås ved en mengde. Mengder kan oppfattes som en spesiell kategori av egenskaper, nemlig som de egenskaper som har den samme ekstensjonen i alle verdener. Sagt på en annen måte kan man si at en egenskap er en mengde hvis og bare hvis det for enhver entitet enten er logisk nødvendig at den har egenskapen eller at det er logisk nødvendig at den ikke har egenskapen. I tillegg til versjonene av de vanlige ZFC-aksiomene innfører vi derfor i MZFC visse aksiomer som relaterer egenskaper og mengder. Vi nevner også at vi formulerer to versjoner av det såkalte regularitetsaksiomet[1]. Vi finner det dessuten nødvendig å innføre et aksiom som sier at dersom x er en egenskap så er også det å være en entitet som det er logisk mulig at har egenskapen x en egenskap. Endelig innfører vi et aksiom som er en smule mer komplisert: La oss si at x hører med til den potensielle sum assosiert med egenskapen y hvis og bare hvis det finnes noe z og det er logisk mulig at x har egenskapen z og det dessuten er logisk mulig at z har egenskapen y. Det siste aksiomet sier da at dersom y er en egenskap er også det å være noe som hører med til den potensielle sum assosiert med y en egenskap.

Så meget som en innledende beskrivelse av egenskapsteorien MZFC. Systemet vil bli presist definert i §4. En presis beskrivelse og definisjon av den versjonen av ZFC som vi vil basere oss på vil bli gitt i §5.

Når det gjelder systemet MZFC har vi en bestemt modell i tankene, nemlig det man kan kalle det rene kumulative egenskapshierarki. Aksiomene og slutningsreglene i MZFC er naturligvis ikke valgt ut vilkårlig. Bare formler som er sanne i denne intuitive, naturlige modellen kvalifiserer som potensielle aksiomer. Videre vil bare slutningsregler som fører fra formler som er gyldige i modellen til andre formler som er gyldige være blandt dem som det kan komme på tale å innlemme i systemet.

Det rene kumulative egenskapshierarki er summen av elementene i en uendelig sekvens E av stadig mer omfattende mengder. E er en funksjon som til ethvert ordinaltall α tilordner dette en mengde av egenskaper $E(\alpha)$, og der vi har, om α,β er ordinaltall og $\alpha<\beta$, at $E(\alpha)$ Inkl $E(\beta)$. Vi kaller $E(\alpha)$ for nivå α i hierarkiet. Selve hierarkiet er $UN/\alpha\hat{e}On/(E(\alpha))$.

La oss gi en uformell beskrivelse av dette hierarki og starte med nivå 0. Dette er rett

1 Eller Fundierungsaksiomet som vi også kaller det.

© 2012 Morten Harboe Rognes

og slett nullmengden. Man kan altså sette E(0)=ø.

Elementene på nivå 1 er mengden av alle de egenskapene e der det er logisk nødvendig at ekstensjonen er inkludert i nivå 0. Dette innebærer at nivå 1 er mengden av alle de egenskapene der ekstensjonen er inkludert i nullmengden. La oss bemerke at vi med ekstensjonen til en egenskap forstår mengden av alle de entitetene som har egenskapen.Vi forutsetter at to egenskaper er identiske om det er logisk nødvendig at de har den samme ekstensjon. Hvis det er logisk nødvendig at ekstensjonen til en egenskap er inkludert i nullmengden, er det naturligvis logisk nødvendig at ekstensjonen til denne egenskapen er nullmengden. Det følger at det finnes en og bare en egenskap på nivå 1. Nivå 1 inneholder altså nøyaktig en egenskap, nemlig nullegenskapen, det vil si den egenskap hvis ekstensjon i enhver verden er nullmengden. Betegner vi nullegenskapen med ø* og nivå 1 med E(1), har man altså at E(1) = {ø*}

La oss nå se på nivå 2. Dette er mengden av alle egenskapene på nivå 1 utvidet med alle de egenskaper der det er logisk nødvendig at ekstensjonen er inkludert i nivå 1. Dette innebærer at nivå 2 inneholder nullegenskapen, men også alle de egenskapene hvor ekstensjonen er en delmengde av nivå 1. Dette innebærer at i tillegg til nullmengden inneholder nivå 2 alle de egenskapene hvor det er logisk nødvendig at ekstensjonen er inkludert i {ø*}

Tenker man seg at det finnes en uendelig mengde med logisk mulige verdener og at det korresponderer en egenskap til enhver funksjon som tilordner ethvert element i mengden av mulige verdener en eller annen mengde, vil mengden av egenskaper på nivå 2 være uendelig.

Vi har nå beskrevet de tre første nivåene i det rene kumulative hierarki av egenskaper. Anta nå at vi har for oss nivå α i denne rekken der α er et ordinaltall, med andre ord E(α). Da er nivået som kommer etter nivå α, E(α+1), nivå α pluss mengden av alle de egenskaper x der det er logisk nødvendig at ekstensjonen til x er inkludert i nivå α. Betegner vi mengden av alle de egenskaper x der det er logisk nødvendig at ekstensjonen til x er inkludert i mengden y med Pt(y) har man at E(α+1) = E(α)U Pt(E(α)). Vi har nå definert E(α) for alle de ordinaltall som enten er 0 eller der vi har at α=β+1 for noe ordinaltall β. Er α imidlertid ikke et slikt ordinaltall, men et grenseordinaltall, lar vi nivå α være unionen av alle de forskjellige nivåene som kommer før nivå α. Dette innebærer at E(α)= UN/β<α/(E(β)) om α er et grenseordinaltall. Det er altså denne unionen av alle mengdene i sekvensen E som er definert ved de følgende tre punkter:

(i) E(0) = ø
(ii) E(α+1) = E(α)U Pt(E(α))
(iii) E(α)= UN/β<α/(E(β))

som vi kaller for det rene kumulative egenskapshierarki. Betegner vi mengden av ordinaltallene med On er altså det rene kumulative egenskapshierarki UN/αêON/(E(α)).

Det er altså dette hierarkiet, som vi her bare har skissert, som utgjør den modellen for MZFC vi har i tankene. Vi vil gi en mer nøyaktig definisjon av denne modellen i §3.

Det virker rimelig å tro at enhver entitet som er et element på et eller annet nivå i dette hierarkiet er en egenskap. Ser man nærmere på måten vi har beskrevet hierarkiet skulle dette være en trivialitet. Det som derimot ikke er opplagt er om det omvendte holder, med andre ord om enhver egenskap nødvendigvis er med på et eller annet nivå i dette hierarkiet. Dette er

© 2012 Morten Harboe Rognes

langt fra opplagt. Reflekterer man litt nærmere over saken ser man at enhver egenskap i dette rene kumulative hierarki alltid er en entitet der det er nødvendig at ekstensjonen enten er tom eller er en mengde av egenskaper som hører med på lavere nivåer i hierarkiet. Det er altså logisk umulig å tenke seg en egenskap i dette rene kumulative hierarki hvor det er logisk nødvendig at ekstensjonen kun inneholder entiteter som hverken er egenskaper eller mengder. La oss kalle entiteter som hverken er egenskaper eller mengder for urindivider.[2]

Det virker absurd å hevde at for eksempel en hest er en mengde eller en egenskap. Det kan derfor virke rimelig å si at det er logisk nødvendig at ingen hest er noen egenskap eller noen mengde. Finner man det rimelig å hevde at egenskapen å være en hest finnes må man derfor medgi at det er logisk nødvendig at ekstensjonen til denne egenskapen, nemlig mengden av hester, er en mengde av urindivider. Er dette tilfellet kan ikke egenskapen å være en hest være en egenskap som hører med i det rene kumulative egenskapshierarkiet. Det følger at dette hierarkiet ikke kan uttømme mengden av alle egenskaper.

Hvis man derfor ønsker å avgrense et mer adekvat egenskapsbegrep virker det helt nødvendig å inkludere egenskaper ved urindivider i egenskapsuniverset, og ikke bare "rene" egenskaper.

Det er nærliggende å tro at det finnes urindivider, med andre ord at det finnes entiteter som hverken er egenskaper eller mengder.

Man kan spørre om hvor mange urindivider som eksisterer. Det er vanskelig å gi noe definitivt svar. Spørsmålet får derfor stå åpent, men det virker ikke selvmotsigende å anta at det finnes mengder som utelukkende inneholder urindivider og som er uendelige. Selv dette kan virke som et temmelig beskjedent postulat.

Finnes mengden av absolutt alle urindivider? Når det gjelder dette spørsmålet er igjen en viss tilbakeholdenhet på sin plass. La oss bememerke at dersom man hevder at det finnes uendelige mengder med urindivider, noe vi antydet rett ovenfor, er det ikke dermed sagt at mengden av alle urindivider finnes. Det eneste man kan slutte er at dersom denne mengden finnes må den i såfall være uendelig. Det virker imidlertid på ingen måte inkonsistent å tenke seg at mengden av alle urindivider finnes. Faktisk kan man vise, på basis av visse forholdvis rimelige prinsipper, motsigelsesfriheten til en modifikasjon av systemet MZFC som tillater urindivider og der man i tillegg inkluderer et postulat som sier at mengden av alle urindivider finnes og er uendelig.

Hvis man postulerer at mengden av alle urindivider finnes kunne man si at urindividene utgjør en lukket, fiksert totalitet av entiteter med et bestemt kardinaltall. På den annen side kan man også betrakte den mulighet at urindividene ikke utgjør en slik sluttet, lukket totalitet, men at det for ethvert kardinaltall som man støter på i ordinaltallsrekken finnes en mengde med urindivider som er likemektig med dette kardinaltall. Enhver mengde med urindivider, for eksempel mengden av hester, vil da være en delmengde av en uendelig mengde med urindivider som i prinsippet kan utvides i det uendelige. Såvidt vi kan se er det heller ikke noe logisk sett inkonsistent i en slik antagelse. La oss kalle den påstand at det til ethvert kardinaltall finnes en mengde med urindivider med dette kardinalltall for postulatet om at urindividene utgjør en åpen totalitet. Selvom postulatet om at urindividene utgjør en åpen totalitet er inkonsistent med påstanden om at mengden av alle urindivider finnes, er det ikke opplagt at postulatet i seg selv er usant eller motsigelsesfyllt. Man kan vise mostsigelsesfriheten av en modifisert versjon av MZFC utvidet med dette postulat på basis av visse forholdsvis rimelige premisser.[3]

2 Mengder kan oppfattes som en spesiell type egenskaper, nemlig som konstante, rigide, egenskaper.
3 Nemlig ZFC utvidet med aksiomet om at det finnes utilgjengelige kardinaltall.

© 2012 Morten Harboe Rognes

La oss konkludere med at hva enten mengden av alle urindivider finnes eller ei virker det rimelig å hevde at det finnes ikke-tomme mengder med urindivider. Et mulig eksempel som ble nevnt ovenfor var mengden av hester. Man kunne istedet ha nevnt mengden av fioler, eller mengden av katter.

Vi ga ovenfor en mer uformell definisjon av det rene kumulative egenskapshierarki. Vi skal nå skissere et mer omfangsrikt begrep, nemlig det kumulative egenskapshierarki over basismengden X. Her kan X i prinsippet være en hvilken som helst mengde, men vi skal primært tenke oss at X er en mengde med ikke-egenskaper, med andre ord urindivider.

Nivå 0 i dette hierarkiet er rett og slett mengden X. Anta α er et etterfølgerordinaltall. Dette innebærer at $\alpha=\beta+1$ for noe ordinaltall β. Da er nivå α i hierarkiet mengden av alle de egenskapene som hører med på nivå β pluss alle de egenskaper e som er slik at det er logisk nødvendig at ekstensjonen til e er inkludert i nivå β. Er α et grenseordinaltall er nivå α unionen av alle de tidligere nivåene i rekken, nemlig unionen av de diverse nivå β der $\beta<\alpha$. Bruker vi notasjonen Pt(x) for mengden av alle de egenskaper der det er slik at ekstensjonen er inkludert i x i enhver verden, kan definisjonen av nivå α i det kumulative egenskapshierarki over X, i symboler E(α)(X) formuleres slik:

(i) $E(0)(X) = X$
(ii) $E(\alpha+1)(X)=E(\alpha)(X) \cup Pt(E(\alpha)(X)$
(iii) $E(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha}(E(\beta)(X))$ om α er et grenseordinaltall.

Vi så ovenfor at det rene kumulative egenskapshierarki ganske visst omfattet bare egenskaper, men at det trolig finnes egenskaper som ikke er "rene", og som er egenskaper ved ikke-egenskaper, med andre ord urindivider. Nærliggende eksempler på slike egenskaper er som nevnt egenskapen å være en hest, eller egenskapen å være en katt.

Det er nå mulig å avgrense egenskapsbegrepet på en mer tilfredstillende måte. Man kan betrakte den følgende påstand:

> *En entitet x er en egenskap hvis og bare hvis det finnes en mengde U av urindivider som oppfyller følgende to krav: (i) x er et element i det kumulative egenskapshierarkiet over U og(ii) x er ikke et element i U*

Denne påstanden kan neppe oppfattes som noen tilfredstillende definisjon av "egenskap" siden vi under avgrensingen av det kumulative egenskapshierarki over X fritt har brukt begrepet egenskap. Som definisjon betraktet er derfor denne tesen direkte sirkulær. Men fra dette kan man ikke slutte at tesen er usann. Det er intet som tilsier dette. Det er heller intet som tilsier at man skal kunne definere egenskapsbegrepet. I stedet for å se på tesen ovenfor som et mislykket sirkulært forsøk på å definere egenskapsbegrepet bør man snarere betrakte den som en substansiell logisk sannhet vedrørende innholdet il egenskapsbegrepet.[4] Man kan sogar gå et skritt videre i denne retning og hevde at en hvilken som helst teori om egenskaper må oppfylle kravet ovenfor om den i det hele tatt skal kunne regnes som adekvat.

La oss nå gi en oversikt over innholdet i dette arbeid.

I §2 spesifiserer vi språket til MZFC. Dette er i det vesentlige et første-ordens språk

4 En tilsvarende, og noe enklere, tese om "rene" egenskaper kan formuleres og formaliseres innenfor rammen av MZFC. Denne tesen, det dreier seg om Teorem 8.34 i §8, kan man bevise. Bevist er ikke-trivielt. Teoremet er derfor ikke uten substans.

© 2012 Morten Harboe Rognes

utvidet med det vanlige par av modaloperatorer, nødvendighet og mulighet, samt en termdannende operator på formler, egnskapsabstraksjon. Som logiske predikater i språket er inkludert identitet og de to predikatene "x er en egenskap" og "x har egenskapen y". Vi kaller dette språket for L;a, og gir i §2 en presis definisjon av de uttrykk i språket som skal regnes som velformede termer og velformede formler.

I §3 spesifiserer vi modellteorien for L;a. Dette skjer innenfor rammen av det vanlige mengdeteoretiske systemet ZFC utvidet med et aksiom som sier at det finnes utilgjengelige kardinaltall. Innenfor denne rammen defineres det vi kaller standardmodellen for L;a. Videre defineres presist hva som menes med referansen til en term t i verdenen w i denne modellen og hva som menes med en formel α er sann i verdenen w i denne modellen. Vi definerer også presist hva som menes med at en formel i L;a er gyldig i denne standardmodellen.

Universet i standardmodellen for L;a representerer det vi tidligere kalte for det rene kumuluative hierarki av egenskaper. I denne modellen er det intet som svarer til urindivider.

Vi definerer imidlertid i §3.2 og §3.3 to andre typer av modeller for L;a der bunn-nivået representerer urindivider.

I §3.2 definerer vi den første typen av modeller. For hvert ordinaltall β definerer vi presist hva som menes med *standardmodellen for L;a over β*. I en slik modell vil urindividene kunne ordnes i en sekvens med lengde β. De vil altså utgjør en mengde av entiteter eller hva vi ovenfor omtalte som "en fiksert totalitet". I forbindelse med denne typen modeller definerer vi også hva som menes med refensen til en term i en mulig verden i en slik modell og hva som menes med at en formel er sann i en mulig verden. En formel er gyldig i standardmodellen for L;a over β dersom og bare dersom den er sann i enhver mulig verden i denne modellen.

I §3.3 definerer vi det vi kaller for *standardmodellen for L;a over μ;0,* der μ;0 er det minste utilgjengelige kardinaltall. I denne modellen utgjør ikke urindividene noen mengde som finnes på noe nivå i egenskapshierarkiet i modellen. Man kan si at i denne modellen ekspanderer egenskapshierarkiet i både "høyden og bredden" om man tillater seg å bruke noe vage og løse uttrykk. Mer presist kan man si at det til enhver mengde i universet i modellen finnes en likemektig mengde med urindivider. Også i forbindelse med denne modellen for L;a definerer vi referanse, sannhet og gyldighet. Dette skjer i prinsippet på samme måte som ved standardmodellen for L;a.

I §4 avgrenser og definerer vi teorien MZFC. Dette er, som man vil se, et temmelig komplisert system, men som vi allerede har nevnt har det i visse hovedtrekk samme struktur som ZFC. Det som gjør systemet langt mer komplisert enn den klassiske versjonen av ZFC er at vi trenger en rekke spesielle lover for egenskapspredikatet "At" samt en rekke lover som fikserer egenskapene til egenskapsabstraksjonsoperatoren λ. I tillegg trenger vi de vanlige lovene for modaloperatorene Nec og Pos, nødvendighet og mulighet, og noen spesielle lover for identitet. En fullstendig oversikt over aksiomene og aksiomskjemaene i MZFC gis i §4. Det er tre slutningsregler i systemet, nemlig modus ponens, universell generalisering og det vi kaller "nødvendighetsregelen". Denne sier at dersom en formel α er et teorem i systemer er også Nec(α) et teorem.

I §4.1 viser vi hvordan vanlige mengdeabstrakter, et vil si termerav typen {x: α}, kan innføres i systemet. Vi gir en kontekstuell definisjon som angir hvordan mengdeabstrakter eleimineres i alle kontekster der de forekommer.[5] Mengdeabstrakter innføres av praktiske grunner. Vi ønsker å formulere våre definisjoner av de egenskapsteoretiske motstykkene til de vanlge mengdeteoretiske begrepene på en slik måte at analogien til ZFC blir størst mulig.

5 Mengdeabstrakter, og dermed mengdeabstraksjonsoperatoren, er derfor definerte begreper i MZFC, i motsetning til operatoren for egenskapsabstraksjon som er et primitivt uttrykk i systemet.

© 2012 Morten Harboe Rognes

I §4.2 betrakter vi en svekket versjon av MZFC som vi betegner med MZFC;u. Det kan vises at alle teoremene i dette systemet er gyldige i standardmodellen over β om β>=1 og også at de er gyldige i standardmodellen over μ;0. Vi betrakter forskjellige aksiomer som MZFC;u kan utvides med.

Formålet med §5, §5.1 og §5.2 er å vise at MZFC er konsistent relativt til ZFC. I den første av disse paragrafene gis det en presis definisjon av systemet ZFC og språket til denne teorien. Språket betegnes med L;ê. I den etterfølgende paragrafen, §5.1, definerer vi en avbildning av formlene i L;a inn i L;ê. I §5.2 viser vi i detalj at denne avbildningen avbilder alle aksiomene i MZFC på teoremer i ZFC, dessuten viser vi at dersom en formel α er sluttet fra visse andre, β;1,..., β;n i overenstemmelse med slutningsreglene i MZFC kan avbildningen av α sluttes fra avbildningene av β;1,...,β;n i ZFC. Dette impliserer at dersom man kan utlede en motsigelse i MZFC kan man også utlede en motsigelse i ZFC. Det følger at dersom ZFC er konsistent vil også MZFC være det.[6]

I §6 introduserer vi alle de grunnleggende begrepene mengdelæren og viser hvordan de kan defineres innenfor rammen av MZFC. Det dreier seg om slike begreper som enhetsmengde, parmengde, ordnet par, snitt og union mellom mengder, relasjon, funksjon, korrelasjon, domenet til en funksjon, og en rekke andre. I dette avsnittet vises det også hvordan de grunnleggende satser som involverer disse begrepene kan utledes. I tillegg til dette beviser vi også noen viktige teoremer som angir hvordan egenskapsabstrakter og mengdeabstrakter i prinsippet kan elimineres i alle de kontekster hvor de forekommer.

§7 er i sin helhet viet ordinaltall. Vi definerer først en rekke begreper som er nødvendige for å kunne gi en tilfredstillende definisjon av ordinaltall. Det dreier seg blandt annet om hva som menes med at R er en velfundert relasjon over en mengde a og hva som menes med at R er en velfundert velordning over en mengde a. Videre definerer vi medlemskapsrelasjonen og hva som menes med en transitiv mengde. Et ordinaltall defineres så, etter mønster av von Neumann, som en transitiv mengde der medlemskapsrelasjonen er en velfundert velordning over mengden. De viktigste grunnleggende satsene om ordinaltall blir så bevist. [7]

I §8 indroduseres de begreper som er nødvendige for å vise en generell versjon av rekursjonsteoremet. Vi definerer dernest dette teorem og introduserer begrepene etterfølgerordinaltall og grensordinaltall. Videre defineres ω, det første uendelige ordinaltall og vi viser hvordan Peanos aksiomer for aritmetikken kan utledes i MZFC. Vi viser så et viktig teorem som kan brukes til å rettferdigjøre definisjonener ved transfinit rekursjon og bruker dette resultatet til å definere, innenfor rammen av MZFC, det rene kumulative hierarki av egenskaper samt det rene kumulative mengdehierarki. Endelig formuleres og bevises en rekke viktige satser som belyser egenskapene til disse to hierarkiene og dessuten satser som viser hvordan disse hierarkiene er relatert til hverandre.

I §5.2 ga vi et bevis for at for at MZFC er konsistent relativt til ZFC. I §9 vises den omvendte sats, nemlig at ZFC er konsistent relativt til MZFC. Vi spesifiserer en avbildning som avbilder enhver formel i L;a på en formel i L;ê og viser at denne avbildningen overfører alle aksiomer i ZFC på teoremer i MZFC og at den bevarer gyldigheten til slutningsreglene i ZFC. Gitt et bevis for en motsigelse i ZFC kan man derfor effektivt transformere dette bevis for en til et bevis for en motsigelse i MZFC. Det følger at dersom MZFC er konsistent må

6 Det bør nevnes at den bevismetoden vi benytter ikke uten videre kan anvendes på utvidelsene av MZFC;u som vi beskriver i §4.2. MZFC;u er selvfølgelig konsistent relativt til ZFC siden systemet fremkommer ved å fjerne aksiomer fra MZFC.

7 Hovedsakelig dreier det seg om de satsene som er nevnt i første halvdel av kapittel 7 i Takeuti & Zaring [1].

© 2012 Morten Harboe Rognes

også ZFC være det. Sammen med resultatet i §5.2 impliserer dette at MZFC er ekvikonsistent med ZFC.

I §10 vender vi tilbake til modellteorien for L;a og viser en rekke satser om det rene kumulative egenskapshierarki slik dette, i §3, ble definert som en del av standardmodellen for L;a. I §11 går vi videre og gir et detaljert bevis for at ethvert teorem i MZFC er gyldig i standardmodellen for L;a. Beviset føres, og må føres, innenfor et system som er sterkere enn ZFC. I denne paragrafen arbeider vi innenfor ZFC utvidet med et aksiom som sier at det finnes utilgjengelige kardinaltall.[8] Siden MZFC inneholder et betraktelig antall aksiomer er beviset temmelig langt.

Den utsagnsteorien vi har presentert i Rognes [1],[2] kan intepreteres inn i MZFC utvidet med visse aksiomer som er gyldige i standardmodellen for L;a. Dette tema, samt en rekke spørsmål som melder seg i denne forbindelse, tar vi opp i §12.

§13 inneholder en oppsummering og konklusjon.

§2 Språket til teorien MZFC

Språket til MZFC er en utvidelse av språket til den vanlige identitetsteorien. Dette innebærer at det inneholder en tellbart uendelig mengde med variabeltegn, de vanlige setningslogiske konnektivene, kvantorene og identitetspredikatet. I tillegg inneholder det visse andre tegn som man ikke har til rådighet i den rene identitetsteori. Det dreier seg først og fremst om de to modaloperatorene "Det er nødvendig at -" og "Det er mulig at -". Disse konstuksjonene betegner vi med "Nec" og "Pos". Dessuten tar vi med to andre uttrykk, nemlig predikatet "x er en egenskap" som vi forkorter med "At(x)"[9], og det binære predikatet "x har egenskapen y" eller "x er i besittelse av egenskapen y" som vi forkorter med "xεy"[10]. Det er forøvrig viktig å skille dette sistnevnte predikatet fra "xêy" som betyr at x er et element i mengden y.Det binære predikatet ê kan forøvrig defineres innenfor rammen av MZFC, men det er ikke noe primitivt begrep i denne teorien.

Ved siden av de uttrykkene som vi så langt har nevnt inneholder også språket tl MZFC, som vi betegner med L;a, også en termdannende konstruksjon på en variabel og en formel, nemlig konstruksjonen "egenskapen å være en x slik at - " Vi betegner denne konstruksjonen med λ. Er x et variabeltegn og α en formel leses uttrykket "λxα" på den måten som vi har antydet, nemlig som "egenskapen å være en x slik at α". Vi kaller termer av typen "λxα" for egenskapsabstrakter. På et senere stadium skal vi også innføre mengdeabstrakter i teorien, men da som et definert, ikke-primitivt begrep.

Vi har så langt beskrevet de viktigste ingrediensene i språket til MZFC. Det er imidlertid to andre kategorier av uttrykk som vi også vil kommentere.

Den første kategorien er en mengde med navn som vi vil legge til språket når vi skal formulere semantikken for det. Hvis vi betegner med D den mengden av entiteter som representerer det univers av objekter man ønsker å bruke L;a til å fremsette påstander om, kan det være hensiktsmessig å inkludere en mengde med navn i L;a som korresponderer en-entydig med elementene i D. Vi vil altså tenke oss at L;a kan utvides med navn på denne måten.

Den andre kategorien av uttrykk som potensielt kan legges til L;a er eventuelt en

8 Det virker ikke som om noen seriøse logikere så langt har satt noe spørsmålstegn ved konsistensen til dette system.

9 "At(x)" kan også lese "x er et attributt". Det bør understrekes, og leseren bør helst ikke glemme det, at vi bruker ordene "attributt" og "egenskap" om hverandre og i nøyaktig den samme betydning".

10 Andre alternative lesemåter for "xεy" er "y er en egenskap som kan tilskrives (predikeres, tillegges) x"

© 2012 Morten Harboe Rognes

mengde med ikke-logiske predikater. Denne predikatmengden kommer i så fall som et supplement til de predikatene som allerede er med i språket og som kan karakteriseres som logiske predikater, nemlig predikatene At, = og ε. Det er naturligvis mulig å legge til en slik kategori av ikke-logiske predikater. Skal man omtale forhold som har å gjøre med entiteter som ikke er av matematisk eller logisk natur er dette helt nødvendig. I dette skrift skal vi imidlertid utelukkende beskjeftige oss med forhold av logisk og matematisk karakter og vi har derfor ikke behov for å innføre ytterligere predikater utover de tre vi allerede har nevnt.

La oss nå gi en mer formell avgrensning av språket til L;a. Vokabularet som formlene og termene i i dette språket er dannet ved hjelp av består (i) av en uendelig mengde med variabeltegn, nemlig x,y,z,w, x',y', z', w', ... osv., og (ii) av de følgende tegn:

(1) At, λ, =, ε, ¬, →, A, Nec, Pos

Når det gjelder uttrykkene ,¬,→ representerer disse de vanlige setningslogiske konnektivene, nemlig negasjon og materiell implikasjon. A er allkvantoren. En formel av typen "(Ax)α" leses "For alle objekter x er det slik at α".

Når det gjelder de vanlige setningslogiske konnektivene disjunksjon, konjunksjon og materiell ekvivalens , som betegnes med henholdsvis v, & ↔ innføres disse som definerte uttrykk. Uttrykket "α v β" brukes som forkortelse for "(¬α)→β", "α&β" brukes som forkortelse for "¬(α→(¬β))" og "α↔β" brukes som forkortelse for "(α→β) & (β→α)"

Angående eksistenskvantoren betegnes denne med E. Et uttrykk av typen "(Ex)α" leses derfor "For minst et objekt x er det slik at α". Eksistenskvantoren innføres i L;a som et definert uttrykk og defineres ved hjelp av allkvantoren og negasjon på vanlig måte. Dette innebærer at et uttrykk av typen "(Ex)α" brukes som forkortelse for "¬(Ax)¬α".

Når det gjelder de andre uttrykkene på listen ovenfor, nemlig "At", "=", "λ" og "ε" har vi allerede kommentert dem.

Formlene og termene i språket er avgrenset ved den følgende simultane induktive definisjon på termer og formler.

Definisjon 2.1: Formlene og termene i L er definert induktivt slik:

(i) Er t en term er At(t) en formel
(ii) Er t og t' to termer er t=t' og tεt' formler
(iii) Er α en formel er ¬α. Nec(α), Pos(α) formler
(iv) Er α,β formler er α→β en formel
(v) Er x et variabeltegn og α en formel er (Ax)α og (Ex)α formler
(vi) Er x et variabel tegn er x en term
(vii) Er x et variabeltegn og α en formel er λx(α) en term

Vi noterer at dersom man ønsker å ta med konstanter eller navn i L;a, noe vi faktisk vil, er det nødvendig å legge til en klausul i Definisjon 2.1 som sier at alle konstanter og navn er termer. Tenker man seg da at i og i' er to navn vil i så fall for eksempel At(i) og i=i' være velformede formel i L;a.

Tar man med ikke-logiske predikater i språket må man føye til en klausul som sier at dersom P er et n-ært ikke-logisk predikat og t;1, ..., t;n er n termer så er P(t;1...t;n) en formel. Hvis man legger til en slik klausul kan man beholde klausul (i) og (ii) i definisjonen ovenfor,

© 2012 Morten Harboe Rognes

men man bør da, for å unngå sammenblanding, regne "At(x)", "x=y" og "xεy" for logiske predikater.

I det neste avsnitt skal vi se på modellteorien for språket L;a og definere hva som menes med en gyldig formel i dette språket.

§3 Semantikk for språket L;a

Det er viktig å merke seg at vi dette avsnittet arbeider fullstendig innenfor rammen av systemet ZFC slik dette systemet er beskrevet i Takeuti & Zaring [1].[11] Vi gjør også oppmerksom på at uttrykket "ê" i dette avsnittet betegner medlemskapsrelasjonen i ZFC og at formler av typen "xêy" leses "x er medlem av mengden y". Metaspråket for våre semantiske betraktninger er altså dette vanlige mengdeteoretiske systemet. I tillegg til alle de vanlige aksiomene i ZFC skal vi imidlertid i vår redegjørelse og diskusjon av modellteorien for MZFC også forutsette som et aksiom at det finnes utilgjengelige kardinaltall. Strengt tatt arbeider vi derfor i dette avsnittet innenfor systemet ZFC utvidet med med dette aksiomet.

La oss nå definere domenet til den modellen for MZFC som vi ønsker å spesifisere. Først bemerker vi at I i dette avsnittet skal være en ikke-tom mengde. Det kan være en hvilken som helst mengde. Det er imidlertid meningen at den skal representere de mulige verdnene i modellen. Det er naturlig å kreve at denne mengden er minst tellbart uendelig, men vi skal la dette spørsmålet stå åpent. Først definerer vi det rene kumulative egenskapshierarki. Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 3.1

(i) $A(0,I) = ø$

(ii) $A(\beta,I) = A(\alpha,I) \cup (Pt(A(\alpha,I))^I)$ om $\beta=\alpha+1$

(iii) $A(\beta, I) = UN/\alpha<\beta/(A(\alpha,I))$ om β er et limesordinaltall

I det følgende betegner μ;0 det minste utilgjengelige kardinaltall. Det rene kumulative egenskapshierarki opp til det minste utilgjengelige kardinaltall er A(μ;0,I).[12]

La oss fremsette noen bemerkninger til denne definisjonen. Siden begrepet egenskap ikke er noe primitivt begrep i ZFC representerer vi egenskaper ved visse funksjoner. Tenker vi

---

11 Vi gjør oppmerksom på at vi i §5 gir en eksplisitt definisjon av ZFC.

12 Noen ord om A(μ;0,I). La oss beskrive de første nivåene av hierarkiet <A(α,I)>/αêμ;0/. Man har:

Pt(ø) = Mg(x: x Inkl ø) = {ø} og derfor:

(0) Pt(ø)^I = Mg(f: Func(f) & Dom(f) = I & Rgn(f) Inkl Pt(ø))

= Mg(f: Func(f) & Dom(f) = I & Rgn(f) Inkl {ø}) = {Mg(<w,ø>: wêI)}= {λ/wêI/(ø)}

Nå har man:

Rgn(f) Inkl {ø} ↔ Mg(z:(Ex)(<x,z>êf)) Inkl {ø}

↔ (Az)((Ex)(<x,z>êf)→ z=ø) og

Dom(f) = I ↔ Mg(x: (Ez)(<x,z>êf)) = I ↔ (Ax)((Ez)(<x,z>êf) ↔ xêI)

Det følger at vi har

(1) Func(f) & Dom(f) = I & Rgn(f) Inkl {ø} & <x,y>êf. → xêI & y=ø. Herav:

(2) Func(f) & Dom(f) = I & Rgn(f) Inkl {ø} → (Ax)(Ay)(<x,y>êf → xêI & y=ø)

→ f Inkl Ix{ø}

Man har, om x Inkl {a,} at x={a} v x=ø. Siden I≠ø følger det at Dom(f) ≠ø og derfor at f ≠ø. Herav har man så at Rgn(f) ≠ø. Da må vi ha, om Rgn(f) Inkl {ø}, at Rgn(f) = {ø}. Fra dette og det som står ovenfor følger (0).

Vi har altså at A(0,I) =ø og at

A(1,I) = A(0,I)U Pt(A(0,I))^I = øU Pt(ø)^I = Pt(ø)^I = {λ/wêI/(ø)}

Nå har man at Pt(A(1,I)) = Pt({λ/wêI/(ø)}) = {ø ,λ/wêI/(ø)}. Derfor har man:

A(2,I) = A(1,I) U ({ø ,λ/wêI/(ø)})^I = {λ/wêI/(ø)} U {ø ,λ/wêI/(ø)})^I

© 2012 Morten Harboe Rognes

oss at mulige verdener eksisterer vil det til enhver egenskap e finnes en ekstensjonsfunksjon som tilordner hver verden w mengden av alle de entiteter som har egenskapen e i verdenen w. Omvendt vil det til enhver ekstensjonsfunksjon f finnes en egenskap e slik at om w er en mulig verden vil mengden av alle de entiteter som har egenskapen e i verdenen w være identisk med f(w). Siden I representerer representerer mengden av mulige verdener vil funksjonene i Pt(X)^I der X er en eller annen mengde representere egenskaper. Er fêPt(X)^I og wêI representerer f(w) ekstensjonen til egenskapen f i verdenen w. Man ser også at dersom fêPt(X)^I er ekstensjonen til f i verdenen w, f(x), inkludert i X. Med andre ord er det logisk nødvendig at ekstensjonen til f er en delmengde av X.

La oss nå se på hierarkiet ovenfor <A(α,I)>/αêOn/. Man ser at A(0,I) =ø. Med andre ord er det nivå 0 i dette hierarkiet nullmengden. Er β et etterfølgerordinaltall har man at β=α+1. Man ser da at A(β,I) er A(α,I) pluss mengden av alle de egenskapene der det er logisk nødvendig at ekstensjonen er inkludert i A(α,I). Nivå β er er med andre ord unionen av det tiligerere nivå α pluss alle de egenskapen e der e(w) er inkludert i dette nivå α for alle wêI. Endelig har man om β er et limes ordinal at A(β,I) er unionen av alle de tidligere nivåene A(α,I) der α < β. Man har altså at UN/αêOn/(A(α,I)) representerer det rene kumulative egenskapshierarki slik vi beskrev dette i §1.

Siden UN/αêOn/(A(α,I)) ikke eksisterer i ZFC utvidet med aksiomet som sier at det finnes utilgjengelige kardinaltall lar vi universet i vår modell for MZFC bare være UN/αêμ;0/(A(α,I)), dvs. A(μ;0,I), med andre ord det rene kumulative egenskapshierarki opp til det minste utilgjengelige kardinaltall. A(μ;0, I) er altså hovedkomponenten i vår modell, dvs. det området av objekter som det er hensikten at formlene i L;a skal si noe om.

Det er tre predikater i L;a, nemlig "At(x)", "x=y" og "ε". Vi må angi hvilken ekstensjon hver og en av disse predikatene skal ha for de diverse elementene i I.

La oss først se på At. Vi lar ekstensjonen til dette predikatet i enhver verden wêI være A(μ;0, I). Dette innebærer at ekstensjonen til At i enhver verden er alle de egenskapene som er med i det rene kumulative egenskapshierarki opp til μ;0. Er P et predikat i L;a betegner vi ekstensjonen til P i verdenen w med Φ(P)(w).

Hva er ekstensjonen til predikatet "=" i verdenen w? Vi lar dette være mengden {<x,y>: x=y & x,yêA(μ;0,I)}. Dette innebærer at ekstensjonen til identitetspredikatet i enhver verden er den samme og at den er identitetsrelasjonen begrenset til A(μ;0, I).

Når det gjelder attributalrelasjonen ε setter vi at ekstensjonen til denne i verdenen w, ie. Φ(ε)(w) er mengden av alle de par <x,y> der x,yêA(μ;0,I) og hvor vi har at x er med i ekstensjonen til y, det vil si hvor xey(w).

Den intepretasjonsfunksjonen Φ som vi nå har definert for predikatene i L;a skal vi kalle standardardintepretasjonen av L;a. Vi kan definere denne intepretasjonsfunksjonen som fastsetter betydningen til de logiske predikatene i L;a på den følgende måte:

Φ(At)(w) = A(μ;0,I) om wêI
Φ(=)(w) = Mg(<x,y>: x=y & x,yêA(μ;0,I)) om wêI
Φ(ε)(w) = Mg(<x,y>: x,yêA(μ;0,I) & xêy(w)) om wêI

Formulert annerledes:

Φ(At) = λ/wêI/(A(μ;0,I))
Φ(=) = λ/wêI/(Mg(<x,y>: x=y & x,yêA(μ;0,I)))
Φ(ε) = λ/wêI/(Mg(<x,y>: x,yêA(μ;0,I) & xêy(w)))[13]

13 Merk at Vi bruker λ/xêa/(f(x)) for å betegne Mg(<x,f(x)>: xêa). Med andre ord er λ/xêa/(f(x)) den funksjonen

© 2012 Morten Harboe Rognes

La oss nå tenke oss at vi utvider L;a med navn på alle elementene i A(μ;0,I). Vi betegner L;a utvidet med disse navnene med L;a+. Mengden av navnene i dette språket betegner vi med N(L;a+). Sammen med disse navnene tenker vi oss gitt en navngivningsfunksjon d som avbilder N(L;a+) en-entydig på A(μ;0,I). Er altså i et navn i L;a+ er d(i) det objektet i A(μ;0,I) som i er et navn på. Er på den annen side x et objekt et objekt i A(μ;0, I) er d;-1(x) det navnet i L;a+ som er navn på x.

Vi har i det følgende behov for å fiksere et objekt som ikke er med i A(μ;0,I) som skal tjene som referanse for de termene i L;a som man kan vise at ikke betegner noe i A(μ;0,I). Vi skal la dette være det minste utilgjengelige kardinaltallet. Dette er naturligvis et vilkårlig valg. Vi kunne ha latt det være for eksempel det kardinaltallet som kommer umiddelbart etter dette. Vi betegner dette "null"-objektet med *.

Vi kan nå definere standardmodellen for L;a. Dette er rett og slett fire-tuplet <A(μ;0, I), I,d,*>. Denne modellen betegnes med M. Her er A(μ;0,I) det rene kumulative egenskapshierarkiet over I, I er den ikke-tomme mengden som representerer de mulige verdenene i modellen, d er navngivningsfunksjonen for navnene i L;a+ og * er nullobjektet for de termene i L;a som savner referanse.

Anta w er et element i I. Vår neste oppgave er da å definere hva som er referansen til en lukket term i L;a+ i verdenen w i denne standardmodellen M. Videre må vi definere hva som menes med at en lukket formel α i L;a er sann i modellen i verdenen w.

I det følgende bruker vi uttrykket "Ref;<M,w>(t)" som forkortelse for det lengere uttrykket " referansen til termen t i verdenen w relativt til standardmodellen M". Videre bruker vi "<M,w> ⊨α" som forkortelse for "α er sann i verdenen w i standardmodellen M".

Disse to uttrykkene er definert ved den følgende simultane induktive definisjon på termer og formler i L;a+:

Definisjon 3.2

(i) Ref;<M,w>(i)= d(i)

(ii) Ref;<M,w>(λ;x(α)) er λ/wêI/((Mg(d(i): <M,w> ⊨ α;x[i])) om λ/wêI/(Mg(d(i): <M,w> ⊨ α;x[i])) êA(μ;0,I) og * ellers.

(iii) <M,w> ⊨ At(t) ↔ Ref;<M,w>(t) ê Φ(At)(w)

(iv) <M,w> ⊨ t=t' ↔ <Ref;<M,w>(t), Ref;<M,w>(t')>êΦ(=)(w)

(v) <M,w> ⊨ tεt' ↔ <Ref;<M,w>(t),Ref;<M,w>(t')>êΦ(ε)(w)

(vi) <M,w> ⊨ ¬α ↔ ¬(<M,w> ⊨ α)

(vii) <M,w> ⊨ α&β ↔ (<M,w> ⊨ α & <M,w> ⊨ β)

(viii) <M,w> ⊨ αvβ ↔ (<M,w> ⊨ α v <M,w> ⊨ β)

(ix) <M,w> ⊨ α→β ↔ (<M,w> ⊨ α → <M,w> ⊨ β)

(x) <M,w> ⊨ α↔β ↔ (<M,w> ⊨ α ↔ <M,w> ⊨ β)

(xi) <M,w> ⊨ (Ax)α ↔ <M,w> ⊨ α;x[i] for ethvert navn i i L;a+

(xii) <M,w> ⊨ (Ex)α ↔ <M,w> ⊨ α;x[i] for et eller annet navn i i L;a+

(xiii) <M,w> ⊨ Nec(α) ↔ (Aw')(w'êI → <M,w'> ⊨ α)

(xiv) <M,w> ⊨ Pos(α) ↔ (Ew')(w'êI & <M,w'> ⊨ α)

Vi skal kalle de enkelte klausuler i denne definisjonen for valuasjonsregler. (i) kalles for valuasjonsregelen for navn. (ii) valusajonsregelen for λ-abstrakter. (iii) valuasjonsregelen for At. osv. (xiv) vil da, om man følger denne terminologien, kalles for valuasjonsregelen for Pos.

som til hvert xêa tilordner f(x).

© 2012 Morten Harboe Rognes

La oss kommentere valuasjonsreglene i Definisjon 3.2 litt mer utførlig. Fra valuasjonsregelen for navn ser man at dersom i er et navn så er referansen til dette navnet i standardmodellen M relativt til verdenen w det objektet i universet av rene egenskaper som navngivningsfunksjonen d tilordner i. Dette innebærer for det første at navn alltid har en referanse. For det andre har det den konsekvens at referansen til et navn er den samme i alle mulige verdener. Navn er med andre ord det Kripke kaller for "rigid designators". For det tredje inne innebærer valuasjonsregelen at dersom en formel av typen i=j, der i,j er navn, er sann er den sann i alle verdener. Formelen vil med andre ord vær nødvendig sann.

Valusjonsregelen for λ-abstrakter, eller egenskapsabstrakter, med andre ord termer av typen λx(α), krever også noen kommentarer.

Mg(d(i): <M,w> ⊨ α;x[i]) er mengden av alle de entiteter x i det rene kumulative hierarki som oppfyller formelen α i modellen M i verdenen w. Denne mengden, vil som man ser kunne variere ettersom man gjennomløper mengden av mulige verdener. Vi kan derfor betrakte den funksjonen som til enhver enhver verden wêI tiordner w mengden Mg(d(i): <M,w> ⊨ α;x[i]). Man kan med andre ord betrakte funksjonen

λ/wêI/(Mg(d(i): <M,w> ⊨ α;x[i])).

La oss kalle denne f. Det valuasjonsregelen for egenskapsabstrakter da sier er at referansen til egnskapsabstraktet λx(α) i modellen M relativt til verdenen w er f om f er et element i hierarkiet av rene egenskaper. I motsatt fall er referansen "nullobjektet" *.

Denne regelen innebærer at at dersom et egenskapsabstrakt λx(α) har en referanse vil det ha denne referansen i alle logisk mulige verdener. Tilsvarende vil det være slik at dersom egenskapsabstraktet mangler refernase i en verden w, med andre ord har nullobjektet som sin referanse i denne verden, vil nullobjektet også være dets referanse i alle verdener. Egenskapsabstrakter vil derfor, i likhet med navn, være "rigid designators". Referansefunksjonen assosiert med et slikt abstrakt, i likhet med referansefunksjonen assosiert med et navn, vil alltid være en konstant funksjon

Valuasjonsregelen for egenskapspredikatet "At" skulle være relativt enkel å forstå. Φ(At)(w) representerer ekstensjonen til dette predikatet i verdenen w.[14] Regelen sier at en atomær formel av typen At(t), der t er en term, er sann i verdenen w i standardmodellen M hvis og bare hvis referansen til termen t i verdenen w er med i ekstensjonen til At i verdenen w.

Når det gjelder de øvrige valuasjonsreglene for de setningslogiske konnektivene , kvantorene og de to modaloperatorene Nec og Pos er disse helt standard. De skulle neppe kreve vidløftige kommentarer.

La oss tilslutt gjøre rede for hva vi mener med at en formel α i L;a er gyldig i standardmodellen M

Anta α er en formel i L;a. og at M er standardmodellen for L;a. Vi kaller da α' for en *instans* av α hvis og bare hvis α' = α;[x1,...,xn](i1,...,in) der x1,...,xn er de variablene som forekommer fri i α og i1,...,in er navn i L;a+.

Er M standardmodellen for L;a, og α en formel i L;a, sier vi at α er gyldig i M, i symboler M ⊨α, hvis og bare hvis vi har for enhver instans α' av α og enhver verden wêI at <M,w> ⊨ α'.

14 Φ(At) er også en konstant funksjon. Ekstensjonen til "At" er som man ser fra definisjonen av Φ mengden A(μ;0,I) i enhver verden w.

© 2012 Morten Harboe Rognes

§3.1 Andre modeller for L;a som tillater urindivider

Vi har ovenfor innført standardmodellen for L;a. I denne modellen består universet utelukkende av egenskaper. Det finnes intet i modellen som representerer ikke-egenskaper eller det vi kaller urindivider. I denne paragrafen, og de to påfølgende, §3.2 og §3.3, skal vi skissere to andre modelltyper hvor grunn-nivået i modellene representerer urindivider. Dette er av teoretisk interesse siden disse modellene leder til en litt annen teori en MZFC. Senere, i §4, skal vi kort betrakte noen modifikasjoner av systemet MZFC som passer bedre med de modellene som presenteres her.

Istedet for å begrense seg til hierarkiet UN/αêOn/(A(α,I)) kan man definere et hierarki A(α,I)(X) for αêOn på følgende måte:

Definisjon 3.1.1

(i) A(0,I)(X) = X
(ii) A(α+1,I) = A(α,I)(X) U Pt(A(α,I)(X))^I
(iii) A(α,I)(X) = UN/β<α/(A(β,I)(X)) om αêK;II

Vi skal kalle dette hierarkiet for det kumulative egenskapshierarkiet over mengden X. I de modellene vi nå skal omtale er det meningen at X skal representere mengden av ikke-attributter. Vi kaller mengden av alle de entiteter som ikke er attributter for *urindivider*. Gitt definisjonen ovenfor kan man vise at den følgende sats holder:

Teorem 3.1.1 Man har:
(Aα)(α>=1 & ¬(yêX) & yêA(α,I)(X) → Func(y) & Dom(y) =I)

Vi finner det hensiktsmessig å gi et bevis for denne påstanden:

Bevis: Satsen bevises ved induksjon på α. (i) Basistrinn. Satsen holder åpenbart for α=0 siden kondisjonalen i teoremet da er tomt sann.

(ii) Anta (1) α=β+1 og anta (2) α>=1 & ¬(yêX) & yêA(α,I)(X).

Vi skal vise at påstanden holder for α dersom vi antar den holder for β. Det er to muligheter når det gjelder β: Tilfelle 1: β=0. Da har vi ved hjelp av (1): α=1. Fra dette kan man så ved hjelp av Definisjon 3.1.1 slutte at A(α,I)(X) = A(1,I)(X) = X U Pt(X)^I. Fra dette og (2) følger yêPt(X)^I og derfor ved hjelp av definisjonen av a^b at Func(y) & Dom(y)=I. Man ser at satsen holder i dette tilfellet.

Tilfelle 2: β>0. Da har vi (3) A(α,I)(X) = A(β,I)(X) U Pt(A(β,I)(X))^I. Fra (2) og (3) følger: yê A(β,I)(X) U Pt(A(β,I)(X))^I. Er yêA(β,I)(X) har vi , siden ¬(yêX) og β<α ved hjelp av induksjonshypotesen at Func(y) & Dom(y)=I. Er yê Pt(A(β,I)(X))^I følger direkte ved hjelp av definisjonen av a^b at Func(y) & Dom(y)=I. Satsen holder i begge tilfelle.

(iii) Anta αêK;II. Da har vi: A(α,I) = UN/β<α/(A(β,I)(X)). Fra dette og (2) følger at det finnes β slik at ¬(yêX) & yêA(β,I)(X). Ved hjelp av induksjonshypotesen følger da at Func(y) & Dom(y) =I.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Fra teoremet ovenfor kan man utlede

(1) (Aα)(α>=1 → (A(α,I)(X)- X) Inkl {y: Func(y) & Dom(y)=I}))

Dessuten følger:

(2) (Aα)(α >= 1 → A(α,I)(X) Inkl (X U {y: Func(y) & Dom(y)=I}))

© 2012 Morten Harboe Rognes

Imidlertid kan man ikke fra dette teoremet utlede at

(3) $X \Omega \{y: Func(y) \& Dom(y)=I\} =ø$

Man legger merke til at dersom (3) er sann har man:

(4) $(A\alpha)(\alpha>=0 \rightarrow X\Omega\ Pt(A(\alpha,I)(X))^I =ø)$

Det er viktig å kunne vise noe i likhet med (4) fordi urindividene i hierarkiet er representert ved X og attributtene i hierarkiet ved funksjoner som tilordner enhver mulig verden en mengde av entiteter, hva enten dette er urindivider, egenskaper eller begge deler. Hvis dette er hva man har i tankene vil det være merkelig om urindividene som er ikke-egenskaper skulle overlappe med mengden av egenskaper.

Vi skal derfor gi bevis for en sats som viser at (3) og (4) holder for et ganske vidt spektrum av valg for X og I. Det dreier seg om den følgende sats:

Teorem 3.1.2 Anta $\delta1, \delta2$ êOn og at $X= \{\alpha: \delta1 =< \alpha =< \delta2\}$ Anta $\delta1>0$. Anta A er ikke-tom mengde og at $I = \{X\}xA$. Da har man:

(i) $(A\beta)(\beta ê On \rightarrow \beta\Omega \{x: Func(x) \& Dom(x)=I\} =ø)$

(ii) $(A\alpha)(\alpha>=0\rightarrow (\beta ê On \rightarrow \beta\ \Omega\ Pt(A(\alpha,I)(\beta))^I =ø))$

Bevis: I denne satsen følger, som vi bemerket ovenfor, punkt (ii) fra punkt (i). Vi vil derfor bare gi bevis for punkt (i). Anta forutsetningene holder og at (1) βêOn. Vi ønsker å vise at (+) $\beta\Omega \{x: Func(x) \& Dom(x)=I\} =ø$. Anta derfor for reduktio ad absurdum at det finnes y slik at (2) yêβ & Func(y) & Dom(y)=I. Fra forutsetningene følger at (3) I≠ø. Det må derfor finnes x der vi har (4) xêI. Siden Dom(y)=I må det følgelig finnes z slik at (5) <x,z>êy. Da har vi i kraft av definisjonen av ordnet par at:

(6) $xê\{x\}ê\{\{x\},\{x,z\}\}ê y$. Siden βêOn & yêβ følger (7) yêOn siden On er transitiv. Fra dette og (6) følger, igjen fordi On er transitiv at (8) xêOn. Nå har vi fra forutsetningene og (4) at $xêI = \{X\}xA$. Det følger at det finnes z1,z2 slik at

(9) $x= <z1,z2> \& z1=X \& z2êA$

Fra dette følger (10) $z1 ê \{z1\} ê\{\{z1\},\{z1,z2\}\}=x$. Siden x er med i On ifølge (8), er x en transitiv mengde. Det følger da fra (10) at z1êx, og derfor, i lys av (9), at Xêx. Men siden x er en transitiv mengde må også X være det. Nå har vi fra forutsetningene at: (11) δ1êX. Dessuten har vi fra forutsetningene at $\delta1>0$. Dette siste impliserer (12) 0êδ1. Fra dette og (11) følger 0êX. Men da har vi $0>=\delta1>0$ i lys av definisjonen av X. Dette er imidlertid absurd. Det følger at det ikke kan finnes noe y som oppfyller kravet (2). Det følger at (+) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

§3.2 En samling modeller for L;a der egenskapen å være et urindivid finnes

Universet i det vi ovenfor kalt standardmodellen for L;a er $UN/\alpha<\mu;0/(A(\alpha,I)(X))$ der X=ø. Man erindrer at μ;0 er det minste utilgjengelige kardinaltall.

Dette innebærer at vi i denne modellen bare betrakter universet av "rene" attributter. Nivå 0 i dette hierarkiet er den tomme mengden. Nivå 1 inneholder bare et attributt, nemlig det som i enhver verden har den tomme mengde som ekstensjon. Vi kan kalle dette nullattributtet. Nivå 2 inneholder dette attributtet og ethvert attributt hvis ekstensjon i enhver verden er inkludert i mengden av attributter på nivå 1. Nivå 3 vil være mengden av alle de attributter som finnes på nivå 2 pluss alle de attributter hvis hvor ekstensjonen i enhver verden er inkludert i mengden av attributter på nivå 2. Slik fortsetter man oppover i hierarkiet. Man ser at ethvert nivå kun vil inneholde attributter hvis ekstensjon i enhver verden bare vil inneholde attributter. På intet nivå i dette hierarkiet vil vi støte på noen egenskap E der vi har

© 2012 Morten Harboe Rognes

for enhver verden w at ekstensjonen til E i w kun inneholder entiteter som ikke er attributter. Med andre ord er standardmodellen for L;a en modell der universet kun inneholder attributter. Alt man kvantifiserer over i L;a når man legger denne modellen til grunn er attributter og intet annet enn attributter.

Det er annerledes om man betrakter A(μ;0,I)(X) om X er en ikke-tom mengde som er disjunkt med Pt(A(α,I)(X))^I for alle αêOn. Da kan X representere de entitetene som er ikke-attributter i universet og enhver funksjon i Pt(A(0,I)(X))^I = Pt(X)^I vil da, bortsett fra null attributtet, være et attributt som i det minste i noen verdener har en ekstensjon som inneholder ikke-attributter, med andre ord urindivider.

Nå så vi i forrige paragraf at dersom vi definerer <A(α;I)(X)>/αêOn/ på den måten vi gjorde kan man ikke uten videre slutte at X og Pt(A(α,I)(X))^I er disjunkte for alle αêOn. Men vi så fra Teorem 3.1.2 at det er mulig å anordne det slik at XΩ Pt(A(α,I)(X))^I=ø for alle αêOn for visse valg av I og X.

I det følgende skal vi forutsette at X= {α: αêOn & 1=<α=<100}. Tallene 1 og 100 er her helt vilkårlig valgt. Videre skal vi forutsette at a er en mengde der ω<Cd(a) < μ;0, med andre ord er a en ikke-tom mengde hvis mektighet er større enn ω , men mindre enn det første utilgjengelige kardinaltall. Vi setter så I = {X}xa. Gitt dette valg av I har vi i kraft av Teorem 3.1.2 at βΩ Pt(A(α,I)(β))^I=ø for alle ordinaltall α,β. Vi definerer en intepretasjonsfunksjon Φ;β for L;a ved å sette:

(i) Φ;β(At)(w) = A(μ;0,I)(β) - β
(ii) Φ;β(=)(w) = {<x,y>: x,yêA(μ;0,I)(β) & x=y }
(iii) Φ;β(ε)(w) = {<x,y>: xêA(μ;0,I)(β) & yêA(μ;0,I)(β)-β & xêy(w) }

Dermed er Φ;β definert. Vi setter nå

M(β) = <A(μ;0,I)(β), Φ;β, d, *> der d er en funksjon som en-entydig tilordner navnene i L;a+ elementer i A(μ;0,I)(β) og * er nullobjektet. Det bør bemerkes L;a+ er språket L;a utvidet med navn på alle elementene i A(μ;0,I). Vi skal kalle M(β) definert på denne måten for *standardmodellen for L;a over β*, eller standardmodellen for L;a der elementene i ordinaltallet β representerer urindividene. Man ser lett at M(β) faller sammen med M om β=0.

Vi kan forøvrig bruke de samme valuasjonsreglene for de logiske konnektivene i L;a som dem som er fastsatt i Definisjon 3.2 bortsett fra at man overalt må erstatte Φ i denne definisjonen med Φ;β. Vi har derfor for eksempel at

<M(β),w> ⊨ iεj ↔ <d(i),d(j)>êΦ;β(ε)(w)

I denne modellen for L;a vil det naturligvis være visse formler som er gyldige om β>0 som ikke vil være det i standardmodellen M. Vi har for eksempel at M(β) ⊨ (Ex)(¬At(x)). Med andre ord er det gyldig i modellen M(β) for β>0 å hevde at det finnes entiteter som ikke er attributter. Videre er det ikke vanskelig å se at vi har M(β) ⊨ At(λx(¬At(x))). Med andre ord er det gyldig at egenskapen å være en entitet som ikke er et attributt faktisk er en egenskap. Videre har vi i kraft av definisjonen av Φ;β at M(β) ⊨ (Ax)(Ay)(xεy → At(y)).

Man ser at i M(β) der 0<β <μ;0 vil alltid egenskapen å være en ikke-egenskap finnes. Dette impliserer at mengden av urindivider finnes og i en viss forstand kan oppfattes som en fiksert totalitet. Spørsmålet er om dette bildet av urindividene er helt tilfredstillende fra en ontologisk synsvinkel. Man kan stille spørsmålet om man ikke for enhver mengde med urindivider a kan finne en mer omfattende mengde med urindivider b, der a Inkl b og hvor vi

© 2012 Morten Harboe Rognes

har at b er av større mektighet enn a. Et bekreftende svar på dette spørsmål virker filosofisk sett mer tilfredstillende enn den anskuelse at urindividene utgjør en helt fiksert totalitet.

I den neste paragrafen skal vi se på en type modell for L;a hvor det ikke er gyldig at mengden av ikke-attributter eksisterer, og hvor det derfor ikke er tilfelle at egenskapen å være et ikke-attributt finnes.

§3.3 Modeller for L;a hvor det til enhver mengde finnes en likemektig mengde med urindivider

Universet i den modellen vi nå skal betrakte er ikke A(μ;0,I)(β) for noe ordinaltall β, men snarere mengden V definert ved:

(1) $V = UN/\beta<\mu;0/(UN/\alpha<\mu;0/(A(\alpha,I)(\beta))$

Siden vi har at $UN/\alpha<\mu;0/(A(\alpha,I)(\beta)) = A(\mu;0,I)(\beta)$ kunne vi, istedet for å bruke (1) som en definisjon av V ha definert V ved:

(2) $V = UN/\beta<\mu;0/(A(\mu;0,I)(\beta))$

Vi tenker oss nå at L;a er utvidet med navn på alle elementene i V til L;a+ og at d er en en-entydig funksjon som avbilder alle navnene i L;a+ på V. Vi definerer nå intepretasjonsfunksjonen Φμ;0 ved å sette:

(i) $\Phi\mu;0(At)(w) = \{x: x\hat{e}(V- \mu;0)\}$
(ii) $\Phi\mu;0(=)(w) = \{<x,y>: x,y\hat{e}V \ \& \ x=y\}$
(iii) $\Phi\mu;0(\varepsilon)(w) = \{<x,y>: x\hat{e}V \ \& \ y\hat{e}V-\mu;0 \ \& \ x\hat{e}y(w)\}$

Vi definerer så modellen M(μ;0) ved å sette $M(\mu;0) = <V, \Phi\mu;0, d, *>$.
På samme måte som tidligere kan vi nå definere valuasjonsreglene for konnektivene i L;a som ved Definisjon 3.2 bortsett at vi overalt må erstatte uttrykket "Φ" i denne definisjonen med uttrykket "Φμ;0". Vi skal kalle denne modellen for standardmodellen for L;a over μ;0.

I denne modellen kan man også vise at formelen $(Ax)(Ay)(x\varepsilon y \rightarrow At(y))$ er gyldig. Videre kan man vise at formelen $(Ex)(\neg At(x))$ er gyldig. Men vi kan ikke vise gyldigheten til at $At(\lambda x(\neg At(x)))$. Med andre ord kan man ikke vise at egenskapen å være en ikke-egenskap finnes.

La oss bruke "At*(x)" som forkortelse for "At(x) & Nec((Ay)(yεx→¬At(y))". Dette vil si at At*(x) holder hvis og bare hvis x er et attributt der det nødvendigvis er slik at enhver entitet som besitter attributtet er et ikke-attributt. En formel man nå kan vise at er gyldig i M(μ;0) er da:

(1) $(Ay)(At^*(y) \rightarrow (Ez)(At^*(z) \ \& \ Nec((Ay)(y\varepsilon x \rightarrow y\varepsilon z) \ \& \ (Ey)(y\varepsilon z \ \& \ \neg y\varepsilon x))))$

Det denne formelen sier er at for enhver egenskap som nødvendigvis er en egenskap ved ikke-attributter finnes det en annen, mer inklusiv egenskap av samme type som er slik at den første egenskapen er ekte inkludert i den andre. Det er også mulig, innenfor rammen av L;a, å formalisere en påstand som sier at for enhver mengde a, hvis elementer utelukkende er urindivider, dvs. ikke-attributter, finnes det en mer inklusiv mengde av urindivider b som er av større mektighet enn a. For å unngå en viss vidløftighet angir vi ikke her formaliseringen av denne påstanden. Man kan imidlertid vise at den må være gyldig i M(μ;0).

© 2012 Morten Harboe Rognes

Vi har nå presentert visse alternativer til det vi i §3 kalte standardmodellen for L;a. Selvom det vi har gjort strengt tatt er et sidespor er det likevel av teoretisk interesse å se på slike alternativer for å få et bedre innblikk i hva standardmodellen innebærer.

I det neste avsnittet skal vi gi en syntaktisk presentasjon av systemet MZFC.

§4 Aksiomer i systemet MZFC

Systemet MZFC er bestemt av de aksiomene, aksiomskjemaene og slutningsreglene som inngår i det. Hensikten med denne paragrafen er å angi disse elementene i systemet. Vi starter med de utsagnslogiske aksiomene som inngår i systemet. Det dreier seg om alle instanser av de følgende skjemaer hvor F,G og H representerer formler i L;a:

(P1) $F \rightarrow (G \rightarrow F)$
(P2) $(\neg F \rightarrow \neg G) \rightarrow (G \rightarrow F)$
(P3) $(F \rightarrow (G \rightarrow H)) \rightarrow ((F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow H))$

Konnektivene v, & og ↔ innføres ved de følgende definisjoner

(i) $FvG \leftrightarrow .\ (\neg F) \rightarrow G$
(ii) $F\&G \leftrightarrow .\ \neg(F \rightarrow (\neg G))$
(iii) $F \leftrightarrow G \leftrightarrow ((F \rightarrow G) \& (G \rightarrow F)$

Når det gjelder aksiomer for kvantorene er disse alle instanser av de følgende to aksiomskjemaer:

(Q1) $(Ax)F \rightarrow F;x[t]$ hvor t er et variabeltegn i L;a.
(Q2) $(Ax)(F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow (Ax)G)$ forutsatt at x er et variabeltegn som ikke forekommer fritt i formelen F.

Eksistenskvantoren E innføres ved den følgende definisjon:

(iv) $(Ex)F \leftrightarrow \neg(Ax)\neg F$

Når det gjelder aksiomer for identitet tar vi med de følgende:

(I1) $t1 = t1' \& t2 = t2' \& .... \& tn = tn' \rightarrow (Pt1...tn \leftrightarrow Pt1' ... tn')$ forutsatt at P er et n-ært predikat i L;a og t1,...,t, t1',...,tn' enten er variabeltegn eller termer i L;a $(n>=1)$
(I2) $P(t;1, ... ,t;n) \rightarrow (Ex)(x=t;i)$ $(i=1..n)$ om P er et n-ært predikat i L
(I3) $(Ax)(x=x)$
(I4) $t1=t2 \& t2 = t3 \rightarrow t1=t3$ om t1,t2 og t3 er enten termer eller variabeltegn.
(I5) $t1=t2 \rightarrow t2=t1$ om t1,t2 enten er termer eller variabeltegn

Innholdet til disse aksiomskjemaene skulle være ganske opplagt. Det skulle heller ikke være særskilte problemer forbundet med å vise at de er gyldige i standardmodellen.

Når det gjelder aksiomer for nødvendighets- og mulighetsoperatorene i L;a bruker vi det

© 2012 Morten Harboe Rognes

følgende standardaksiomsett for det modlalogiske systemet S5 samt supplerer dette med den såkalte Barcan-formelen, TA4, videre med et aksiom som sier at det er logisk mulig at α er tilfelle hvis og bare hvis det ikke er logisk nødvendig at α ikke er tilfelle. Dessuten tar vi med et aksiom, TA6, som sier at entiteter som er identiske nødvendigvis er identiske og som videre sier at distinkte entiteter nødvendigvis er distinkte.

TA1	Nec(F) & Nec(F→ G) → Nec(G)
TA2	¬Nec(¬F) → Nec(¬Nec(¬F)) & (Nec(F) → Nec(Nec(F)))
TA3	Nec(F) → F
TA4	(Ax)Nec(F) ↔ Nec(AxF)
TA5	Pos ↔ ¬Nec(¬F)
TA6	(x=y → Nec(x=y)) & (¬(x=y) → Nec(¬(x=y)))

Det er ganske lett å verifisere at alle disse aksiomene er gyldige i standardmodellen.

Den neste gruppen med aksiomer er de følgende:

TA7	((Ax)At(x)) & (At(y) → Nec(At(y)))
TA8	At(y) &xεy → At(x)
TA9	¬At(y) → Nec(¬At(y))
TA10	(xεy → At(y)) & (Ax)(xêλy(α) ↔ (Ez)(xêz & z=λy(α)))

Her uttrykker den første formelen, TA7 at alt nødvendigvis er egenskaper, det finnes med andre ord ikke urindivider. Den andre konjunkten i denne formelen uttrykker at dersom noe er en egenskap er det logisk nødvendig at det er en egenskap. Begge disse påstandene er åpenbart gyldige i standardmodellen. Videre uttrykker TA8 at dersom y er en egenskap og x har egenskapen y så er også x en egenskap. Dette aksiomet er forsåvidt overflødig siden det kan utledes fra den første konjunkten i TA7. TA9 sier sier at dersom det ikke er tilfelle at y er en egenskap er dette tilfelle med logsik nødvendighet.

Den andre halvdelen av den siste formelen i denne rekken sier at x har egenskapen å være en y slik at α hvis og bare hvis egenskapen å være en y slik at α er identisk med noe z og x har egenskapen z. Med andre ord impliserer en formel av typen xελy(α) at egenskapen λy(α) eksisterer.

Før vi går videre finner vi det hensiktsmessig å definere noe begreper. Vi definerer Uttrykket "Set(x)" som leses "x er en mengde" på følgende måte:

Set(x) ↔. At(x) & (Az)(zεx → Nec(zεx) & (Az)(¬(zεx) → Nec(¬(zεx)))

Som man ser er en mengde i denne betydning en egenskap x der det er logisk nødvendig at en entitet har egenskapen om den faktisk har den og der i tillegg er slik at dersom en entitet z ikke har egenskapen x så er det logisk nødvendig at z ikke har egenskapen z. En mengde er med andre ord en egenskap som har den samme ekstensjon i alle mulige verdener.

Vi definerer videre uttrykket "x =;e y" som leses "x er ekstensjonalt ekvivalent med y" ved den følgende definisjon:

x=;e y ↔ (Ar)(rεx ↔ rεy)

Denne definisjonen sier altså to egenskaper er ekstensjonalt ekvivalente om nøyaktig de samme entitetene er i besittelse av egenskapene i den aktuelle verden. To egenskaper som er

© 2012 Morten Harboe Rognes

ekstensjonalt ekvivalente behøver ikke å være identiske siden deres ekstensjon kan divergere i andre verdener enn den aktuelle verden.

Våre neste aksiomer er:

TA11 $At(y) \& At(z) \& Nec((Ax)(x\varepsilon y \leftrightarrow x\varepsilon z)) \rightarrow y=z$

TA12 $At(\lambda x(F(x))) \rightarrow (y\varepsilon\lambda x(F(x)) \leftrightarrow F(y))$

TA13 $\lambda x(F(x))\varepsilon y \rightarrow (Ez)(z=\lambda x(F(x)) \& z\varepsilon y)$

TA14 $y= \lambda x(F(x)) \rightarrow Nec(y= \lambda x(F(x))) \&$
$y\neq \lambda x(F(x)) \rightarrow Nec(y\neq\lambda x F(x))$

TA15 $At(y) \rightarrow [Nec((Ax)(x\varepsilon y \leftrightarrow F(x))) \leftrightarrow y=\lambda x(F(x))]$

TA16 $At(y) \rightarrow (Ez)(At(z) \& (Ax)(x\varepsilon z \rightarrow Nec(x\varepsilon z)) \&$
$(Ax)(\neg(x\varepsilon z) \rightarrow Nec(\neg(x\varepsilon z))) \& (Aw)(w\varepsilon z \leftrightarrow w\varepsilon y))$

TA17 $At(\lambda x(F(x))) \leftrightarrow (Ey)(y= \lambda x(F(x)))$

Man kan notere at TA11 er identitetsprinsippet for egenskaper. Det sier at to egenskaper er identiske om det er logisk nødvendig at de har den samme ekstensjon, med andre ord om det er logisk nødvendig at alle entitetene som har den ene egenskapen har den andre og omvendt. TA12 er en egenskapsteoretisk versjon av konkretiseringsprinsippet. Det tilsvarende prinsippet i mengdelæren er $x\hat{e}\{y: F(y)\} \leftrightarrow F(x)$. Innholdet til de øvrige prinsippene skulle forøvrig være ganske klart.

Når det gjelder TA16 sier denne formelen at dersom y er en egenskap finnes det alltid en mengde x som er ekstensjonalt ekvivalent med y. Man kunne altså ha formulert prinsippet ved hjelp av definisjonene ovenfor på følgende mer kompakte måte:

$(Ay)(At(y) \rightarrow (Ex)(Set(x) \& x=;e y))$

De følgende aksiomer representerer de egenskapsteoretiske versjonene av de vanligste mengdeteoretiske aksiomene i ZFC:

TA18 $At(z) \rightarrow At(\lambda x(x\varepsilon z \& F(x)))$

TA19 $At(\lambda x(\neg(x=x)))$

TA20 $At(z) \& At(w) \rightarrow At(\lambda x(x=z \vee x=w))$

TA21 $At(w) \rightarrow At(\lambda x(At(x) \& Nec((Az)(z\varepsilon x \rightarrow z\varepsilon w))))$

TA22 $At(z) \rightarrow At(\lambda x((Ew)(x\varepsilon w \& w\varepsilon z)))$

TA23 $(Ew)(At(w) \& Nec(\lambda x(\neg(x=x))\varepsilon w \& (Ay)(y\varepsilon w \& At(y) \rightarrow$
$(Ez)(At(z) \& z\varepsilon w \& Nec((Au)(u\varepsilon z \leftrightarrow u\varepsilon y \vee u=y))))))$

TA24 $At(x) \&(Ey)(y\varepsilon x) \rightarrow (Ez)(z\varepsilon x \& \neg(Ew)(w\varepsilon z \& w\varepsilon x))$

TA25 $[At(a) \& (Ax)(Ay)(F(x,y) \rightarrow At(x) \& At(y)) \&$
$(Ax)(Ay)(Az)(F(z,x) \& F(z,y) \rightarrow x=y)] \rightarrow$
$(Eb)(At(b) \& (Ax)(x\varepsilon b \leftrightarrow (Ey)(y\varepsilon a \& F(y,x))))$

TA18 og TA19 er våre versjoner av henholdsvis utsondringsaksiomet og nullmengdeaksiomet. De resterende aksiomene representerer versjoner av henholdsvis parmengdeaksiomet, potensmengdeaksiomet, foreningsmengdeaksiomet, uendelighetsaksiomet, regularitetsaksiomet (fundierungsaksiomet) og replacement- eller substitusjonsaksiomet.

TA26 $Nec((Ex)(Set(x) \& (Ay)(y\varepsilon x \leftrightarrow F(y)))) \rightarrow At(\lambda y(Fy))$

TA27 $At(x) \& (Ey)(y\varepsilon x) \& (Ay)(y\varepsilon x \rightarrow (Ez)(z\varepsilon y)) \&$

© 2012 Morten Harboe Rognes

(Az)(Aw)(z,wεx → z=;e w v ¬(Er)(rεz&rεw)).
→ (Eu)(At(u) & (Ay)(yεx →
(Ey')(At(y') & y =;e y' & (Ev)(At(v) &(As)(sεu & sεy' ↔ s=v)))

Når det gjelder TA26 og TA27 bemerker vi at TA26 uttrykker at dersom det er logisk nødvendig at det finnes en mengde som består av nøyaktig de elementene som oppfyller betingelsen F(x) så eksisterer egenskapen å være e x slik at F(x). Det virker som om dette aksiomet ikke kan utledes fra noen av dem vi tidligere har nevnt. Dette er hovedgrunnen til at vi har tatt det med. Når det gjelder TA27 er dette vår egenskapsteoretiske versjon av utvalgsaksiomet.

Endelig inngår de følgende aksiomer i MZFC:

TA28 At(x) & (Ey)Pos(yεx) →
(Ez)(Pos(zεx) & Nec(¬(Ew)(Pos(wεz) & Pos(wεx))))
TA29 At(x) → At(λy(Pos(yεx)))
TA30 At(x) → At(λy((Ez)(Pos(yεz) & Pos(zεx))))

TA28 er en variant av regularitetsaksiomet. Man får en formel som er ekvivalent med TA28 dersom man i TA24 erstatter "yεx" overalt med "Pos(yεx)". TA29 uttrykker at dersom x er en egenskap så eksisterer egenskapen å være et objekt y som det er logisk mulig at har egenskapen x. Når det gjelder TA30 finner vi det hensiktsmessig å starte med en definisjon: La oss si at entiteten *y er et potensielt indirekte element i x* hvis og bare hvis det finnes noe z slik at det (i) er logisk mulig at z har egenskapen x og det (ii) er logisk mulig at y har egenskapen z. Gitt denne definisjonen uttrykker TA30 at dersom x er en egenskap så er også det å være et poensielt indirekte element i x en egenskap.

Dermed har vi spesifisert de aksiomene som inngår i systemet MZFC. La oss så angi de slutningsreglene som inngår i systemet. Slutningsreglene er modus ponens, universell generalisering og regelen "Er F et teorem er også Nec(F) et teorem". Vi kan kalle dette nødvendighetsregelen. La oss formulere disse reglene litt mer eksplisitt. Bruker vi "Th(F)" som forkortelse for "F er et teorem" kan reglene formuleres slik:

R1 Th(F) & Th(F→G) → Th(G)
R2 Th(F) → Th((Ax)F)
R3 Th(F) → Th(Nec(F)

Merk at vi har at følgende sats lett kan vises ved hjelp av identitetsaksiomene. Den vises ved induksjon på lengden av velformede uttrykk i L;a:

Teorem 4.1 (i) Anta α' er som α bortsett eventuelt å ha en fri forekomst av variabelen y på et eller flere stder hvor α har en fri forekomst av x. Da gjelder:
x=y → Nec(α ↔ α')
(ii) Anta t' er som t bortsett eventuelt å ha en fri forekomst av variabelen y på et eller flere stder hvor t har en fri forekomst av x. Da gjelder:
x=y → Nec(t=t')

© 2012 Morten Harboe Rognes

§4.1 Mengdeabstrakter innført kontekstuelt i systemet MZFC

Det er to typer termer som inngår offisielt i språket L;a. Dette er for det første variabeltegnene. For det andre er det termene av formen λx(α) der α er en formel i L. Disse siste termene skal vi kalle for *egenskapsabstrakter*. Siden vårt system åpenbart har en meget sterk likhet med vanlige mengdeteoretiske systemer - selvom det grunnleggende sett er en teori om egenskaper og ikke om mengder - , og vi dessuten ønsker å vise at det vanlige ZFC-systemet kan intepreteres i vårt system er det hensiktsmessig å ha til rådighet mengdeabstraksjonstermer av typen {x : α}. Uttrykket "{x: α}" leses "mengden av de x som er slik at α". Denne mengdeabstraksjonsoperatoren er naturligvis ikke en primitiv operator i L;a. Mengdeabstraksjonstermer innføres kontekstuelt. Dette innbærer at vi gir regler som viser hvordan enhver formel som inneholder dem kan utvides til en formel som bare inneholder primitive termer som inngår i L;a. Reglene er de følgende:

Mengde abstrakter kan bare forekomme på variabelstedene i de primitive predikatene i L;a. Siden dette er "At", "=" og "ε" må vi vise hvordan de kan elimineres når de forkommer i disse sammenhengene. Reglene for eliminasjon er de følgede:

Definisjon 4.1.1

(i) Uttrykket "At({x: α})" brukes som forkortelse for "At(λx(α))"
(ii) Er t enten et variabeltegn eller et egenskapsabstrakt brukes " {x: α}=t" som forkortelse for "(Ey)(At(y) & y=t & y= λx(α))"
(iii) Er t enten et variabeltegn eller et egenskapsabstrakt brukes " t = {x: α}" som forkortelse for "(Ey)(At(y) & y=t & y= λx(α))"
(iv) Uttrykket "{x: α} = {x: β}" forkorter "(Ax)(α ↔ β)"
(iv) Uttrykket "yε{x:α}" forkorter "α;x[y]"
(v) Er t et egenskapsabstrakt brukes "tε{x:α}" som forkortelse for uttrykket "(Ey)(At(y) & y=t & α;x[y])"
(vi) Uttrykket "{x:α}ε {x:β}" forkorter "(Ey)(At(y) & y = {x:α} & β;x[y])"
(vii) Er t enten et variabeltegn eller et egenskapsabstrakt brukes uttrykket "{x:α}εt" som forkortelse for "(Ey)(y={x:α} &yêt)"

Fordelen med å innføre mengdeabstrakter på denne måten er at man kan innføre alle de vanlige begrepene i mengdelæren ved den type definisjoner som er vanlige.[15]

§4.2 Alternativer til MZFC som tillater eksistensen av urindivider

Slik vi har definert MZFC er dette systemet i kraft av første del av TA7 uforenelig med påstanden om at det finnes ikke-egenskaper. Denne delen av TA7 sier at (Ax)At(x), med andre ord at ¬(Ex)¬At(x). Med andre ord utelukker påstanden eksistensen av ikke-egenskaper, dvs. urindivider. La oss kalle formelen som fremkommer når man fjerner den første konjunkten i TA7 med TA7'.

15 I denne definisjonen har vi ikke eksplisitt sagt noe om formler av typen {x:α} = {z:β}. I slike tilfelle er det underforstått at vi velger en variant β' av β som inneholder en fri forekomst av x på nøyaktig de stedene β har en fri forekomst av z. Er eksempelvis β = (Ay)(Ax)(Φ(y,x,z)) erstatter vi β med β'=(Ay)(Aw)(Φ(y,w,x)). Tilsvarende ved uttrykk som {x:α}ε{z:β}. Vi erstatter da {z:β} med {x:β'} der β' er en passende variant av β.

© 2012 Morten Harboe Rognes

TA8 passer også dårlig sammen med eksistensen av ikke-attributter. Formelen impliserer at dersom x er et urindivid kan x ikke være i besittelse av egenskaper. Dette høres naturligvis besynderlig ut. Aksiomet må derfor fjernes om man ønsker å endre MZFC slik at den teorien som fremkommer er forenelig med eksistensen av urindivider. Bortsett fra disse to aksiomene er de øvrige aksiomene i MZFC forenelige med eksistensen av urindivider. Når det gjelder TA20 er forbeholdet om at z og w er attributter overflødig. Tillater man urindivider bør parmengden av to urindivider eksistere. Vi betegner denne modifiserte versjon av TA20 medTA20'

Vi kaller systemet som fremkommer når man i MZFC fjerner TA8 og endrer TA7 og TA20 til henholdsvis TA7' og TA20' for MZFC;u. Dette systemet inneholder derfor TA1-TA6, TA7', TA9 - TA19, TA20', TA21 - TA30 som aksiomer og har de samme slutningsregler som MZFC, nemlig modus ponens, universell generalisering og nødvendighetsregelen. I tillegg inneholder dette systemet de setningslogiske, predikatlogiske og itdentitetslogiske aksiomene vi har oppført. Med andre ord er alle instanser av P1-P3, Q1,Q2 og I1 -I5 er aksiomer i systemet.

Man kan vise at alle aksiomene i MZFC er gyldige i standardmodellen.[16] Det følger at alle aksiomene i MZFC;u, og derfor alle teoremene i dette systemet, er gyldige i standardmodellen for L;a. Dette er naturligvis fordi MZFC;u er fremkommet fra MZFC utelukkende ved å fjerne aksiomer.

Når det gjelder TA8 og TA7 kan man vise at disse ikke holder i det vi tidligere omtalte for standardmodellen for L;a over β der βer et ordinaltall >=1. Heller ikke er disse formlene gyldige i det vi definerte som standardmodellen over μ;0 der μ;0 er det minste utilgjengelige kardinaltall. Derimot er trolig alle teoremene i MZFC;u gyldige i standardmodellen for L;a over β for ethvert β>=0 og også i standardmodellen over μ;0.[17]

Vi nevnte i §3.2 og §3.3 at det er to uforenelige måter å utvide MZFC;u på. På den ene side kan man utvide MZFC;u med de følgende to aksiomer:

U1 $(Ex)\neg At(x)$
U2 $At(\lambda x(\neg At(x)))$

Utvider man MZFC;u med disse to aksiomene får man et system som man kan vise at holder i alle standardmodeller for L;a over β der β>=1. U2 holder holder imidlertid ikke i standardmodellen over μ;0. Man ser at U2 sier at egenskapen å være en ikke-egenskap, altså et urindivid, er en egenskap. Siden det er mulig innenfor rammen av L;a å definere begrepene om ordinaltall og likemektighet er det mulig å supplementere teorien MZFC;u ikke bare med U1 og U2, men også med aksiomer som sier noe om hvor stor mengden av urindivider er, for eksempel at den har større mektighet enn mengden av de naturlige tall, eller at den er større enn mengden av de reelle tall.

Som nevnt holder alle aksiomene i MZFC;u , samt U1, i standardmodellen over μ;0. Derimot holder ikke U2 i denne modellen. I denne modellen kan man altså ikke sammenfatte urindividene til en mengde som finnes på et eller annet nivå i egenskapshierarkiet. Man kan imidlertid vise at det i denne modellen er slik at det for enhver enhver mengde finnes en likemektig mengde som bare inneholder urindivider. Med andre ord er den følgende formel gyldig i standardmodellen over μ;0:

U3 $(Ax)(Set(x) \rightarrow (Ey)(Set(y) \,\&\, x \approx y \,\&\, (Az)(z\varepsilon y \rightarrow \neg At(z))))$

16 Se §11 for et meget detaljert bevis.
17 Et detaljert bevis for disse påstandene vil naturligvis bli ganske langt.

© 2012 Morten Harboe Rognes

Man kan altså vise at alle teoremene i systemet MZFC;u utvidet med U1 ogU3 holder i standardmodellen over μ;0.

Alle de teoremene vi uteleder i det følgende holder i MZFC. Vi skal arbeide helt og holdent innenfor dette systemet. Vi er imidlertid av den mening at svært mange av de teoremene vi utleder også kan utledes i MZFC;u og i den utstrekning vi viser teoremer som ikke kan dette, burde det være mulig å utlede dem om man føyer til visse forbehold om at noen entieter som omtales i satsene er egenskaper, eller om man redefinerer endel begrepsdannelser på en passende måte. Vi har ikke gjennomført noen detaljerte undersøkelser i denne forbindelse, og fått en nøyaktig oversikt over hvilke forandringer som er nødvendige, men det virker ikke som om dette skulle være en særskilt vanskelig eller uoverkommelig oppgave.

§5 Om konsistensen til systemet MZFC relativt til ZFC

Vi skal etterhvert vise at MZFC er konsistent relativt til ZFC. For å kunne gi et presist bevis for dette er det nødvendig å gi en presis definisjon av systemet ZFC. Vi skal først gjøre dette.

La oss først spesifisere språket til ZFC som vi betegner med L;ê. Vokabularet til dette språket består av de følgende tegn, nemlig ê,=, →, ¬ og A, samt en uendelig mengde med variabeltegn x, y, z, w, x', y', z', w', etc. ê er medlemspredikatet, = identitetspredikatet, → tegnet for materiell implikasjon, ¬ tegnet for negasjon og A den vanlige allkvantoren.

De velformede formlene i L;ê er avgrenset på vanlig måte:

(i) Er x og y to variabeltegn er xêy og x=y velformede formler
(ii) Er x et variabeltegn og α en velformet formel er (Ax)α en velformet formel.
(iii) Er α og β velformede formler er α→β og ¬α velformede formler.

Konnektivene &, v og ↔ innføres ved de definisjonene som ble gitt tidligere:

(iv) $\alpha \vee \beta \leftrightarrow (\neg\alpha) \rightarrow \beta$
(v) $\alpha \,\&\, \beta \leftrightarrow \neg(\alpha \rightarrow (\neg\beta))$
(vi) $\alpha \leftrightarrow \beta \leftrightarrow (\alpha\rightarrow\beta) \,\&\, (\beta\rightarrow\alpha)$

Eksistenskvantoren E innføres ved denne definisjonen:

(vii) $(Ex)\alpha \leftrightarrow \neg(Ax)\neg\alpha$

Dermed har vi spesifisert språket L;ê

La oss nå spesifisere aksiomene i ZFC. Som utsagnslogiske og predikatlogiske aksiomer bruker vi henholdsvis alle instanser av skjemaene P1- P3 og skjemaene Q1, Q2 som ble nevnt i §4. De identitetslogiske aksiomene er de følgende:

Id 1 $x=y \rightarrow z\hat{e}x \rightarrow z\hat{e}y$
Id 2 $x=y \rightarrow x\hat{e}z \rightarrow y\hat{e}z$
Id 3 $x=x$

© 2012 Morten Harboe Rognes

Id 4 $x=y \rightarrow y=x$
Id 5 $x=y \ \& \ y=z \rightarrow x=z$

Ved hjelp av disse aksiomene er det lett å vise at det generelt holder for enhver formel α at

$x=y \rightarrow \alpha;z[x] \leftrightarrow \alpha;z[y]$

Det følgende er en liste over de mengdeteoretiske akiomene i ZFC:

M1 $(Az)(z\hat{e}x \leftrightarrow z\hat{e}y) \rightarrow x=y$
M2 $(Ey)((Ax)(x\hat{e}y \leftrightarrow x\neq x))$
M3 $(Ey)((Ax)(x\hat{e}y \leftrightarrow x=z \vee x=w))$
M4 $(Ey)((Ax)(x\hat{e}y \leftrightarrow x\hat{e}z \ \& \ \alpha))$ forutsatt at variabelen y ikke forekommer fri i α
M5 $(Ey)((Ax)(x\hat{e}y \leftrightarrow (Ez)(x\hat{e}y \ \& \ y\hat{e}z)))$
M6 $(Ey)((Ax)(x\hat{e}y \leftrightarrow (Az)(z\hat{e}x \rightarrow z\hat{e}w)))$
M7 $(Ew)((Ey)(y\hat{e}w \ \&(Ax)(x\hat{e}y \leftrightarrow x\neq x)) \ \&$
$(Ay)(y\hat{e}w \rightarrow (Ez)(z\hat{e}w \ \& \ (Au)(u\hat{e}z \leftrightarrow u\hat{e}y \vee u=y))$
M8 $(Ax)((Ey)(y\hat{e}x) \rightarrow (Ez)(z\hat{e}x \ \& \ \neg(Ew)(w\hat{e}z \ \& \ w\hat{e}x)))$
M9 $(Ax)(Ay)(Az)(\beta(x,y) \ \& \ \beta(x,z) \rightarrow y=z) \rightarrow$
$(Ey)((Ax)(x\hat{e}y \leftrightarrow (Ew)(w\hat{e}z \ \& \ \beta(w,x))))$
M10 $(Ey)(y\hat{e}x)\& \ (Ay)(y\hat{e}x \rightarrow (Ez)(z\hat{e}y)) \ \&$
$(Az)(Aw)(z,w\hat{e}x \rightarrow z=w \vee \neg(Er)(r\hat{e}z\&r\hat{e}w)).$
$\rightarrow (Eu)((Ay)(y\hat{e}x \leftrightarrow (Ev)(As)(s\hat{e}u \ \& \ s\hat{e}y \leftrightarrow s=v)))$

Man ser at M1 - M11 er henholdsvis det som kalles ekstensjonalitetsaksiomet, nullmengde-aksiomet, parmengdeaksiomet, utsondringsaksiomet, foreningsmengdeaksiomet, potensmengdeaksiomet, uendelighetsaksiomet, fundierungsaksiomet, erstatningsaksiomet og utvalgsaksiomet.

Dermed har vi laget en fullstendig liste over aksiomene i ZFC. Man bør forøvrig legge merke til at M4 og M9 er aksiomskjemaer og strengt tatt ikke enkelt-aksiomer.

La oss endelig bemerke at det bare er to slutningsregler i systemet, nemlig modus ponens og universell generalisering, med andre ord:

(MP) $\vdash \alpha \ \& \vdash \alpha\rightarrow\beta \rightarrow \vdash\beta$
(UG) $\vdash \alpha \rightarrow \vdash (Ax)\alpha$

Dette avslutter vår definisjon av systemet ZFC.

§5.1 En avbildning av L;a inn i L;ê

Vi skal i neste avsnitt vise at systemet MZFC er konsistent relativt til den versjonen av ZFC som vi har formulert ovenfor. For å gjøre dette definerer vi en avbildning ξ som avbilder enhver formel i L;a på en formel i L;ê. Avbildningen er slik at den avbilder ethvert aksiom i MZFC på et teorem i ZFC, dessuten er den slik at dersom α er n formel i L;a som utledes fra β;1,....,β;n ved hjelp av visse slutningsregler som gjelder i MZFC, så kan også ξ(α) sluttes fra ξ(β;1), ... , ξ(β;n) ved hjelp av slutningsregler som gjelder i ZFC. Dette innebærer at ξ avbilder ethvert teorem i MZFC på et teorem i ZFC. Dette må naturligvis bevises og det er dette vi skal gjøre i §5.2. Anta nå at systemet MZFC var inkonsistent. Da ville det finnes en

© 2012 Morten Harboe Rognes

form α slik at α& ¬α var et teorem i MZFC, men da ville også ξ(α&¬α) = ξ(α) & ¬ξ(α) være et teorem i ZFC. Forutsetter vi at ZFC er konsistent er dette umulig. Det følger at i så fall kan heller ikke MZFC være inkonsistent.

Avbildningen ξ er definert på lengden av formlene i L;a på følgende måte:

Definisjon 5.1.1 Vi definerer avbildningen ξ fra Fm(L;a) inni Fm(L;ê) ved induksjon på lengden av formler i L;a slik:

(i) ξ(x=y) = (x=y)
(ii) ξ(α a β) = ξ(α) a ξ(β) om α,β êFm(L;a) og a enten er &,v,→ eller ↔
(iii) ξ(¬α) = ¬ξ(α)
(iv) ξ(Ex)α) = (Ex)ξ(α)
(v) ξ(Ax)α) = (Ax)ξ(α)
(vi) ξ(Nec(α)) = ξ(α)
(vii) ξ(Pos(α)) = ξ(α)
(viii) ξ(xεy) = (xêy)
(ix) ξ(At(x)) = (x=x)
(x) ξ(y= λxα) = (Ax)(xêy ↔ ξ(α))
(xi) ξ(λxα =y) = (Ax)(xêy ↔ ξ(α))
(xii) ξ(λxα = λyβ) = (Ew)((Ax)(xêw ↔ ξ(α)) & (Ay)(yêw ↔ ξ(β)))
(xiii) ξ(yελx(α)) = (Ew)(yêw & (Ax)(xêw ↔ ξ(α)))
(xiv) ξ(λxα εy) = (Ew)(wêy &(Ax)(xêw ↔ ξ(α)))
(xv) ξ(λxα ε λyβ) = (Ew)(Ez)(wêz & (Ax)(xêw ↔ ξ(α)) & (Ay)(yêz ↔ ξ(β)))
(xvi) ξ(At(λxα)) = (Ey)((Ax)(xêy ↔ ξ(α)))

Man ser at konstruksjonen av ξ er temmelig "simpel-minded". Enhver strengt atomær formel i L;a, dvs enhver formel av typen "xεy", "x=y" og "At(x)" tilordnes en formel av nøyaktig samme type, nemlig "xêy" og "x=y", bortsett fra "At(x)" som tilordnes "x=x". Videre er reglene for de utsagnslogiske konnektivene av en direkte opplagt natur. Det samme gjelder for kvantorene A og E. Man ser videre at formler av typen Nec(α) og Pos(α) kollapser til α. Videre ser man at de kvasiatomære formlene som står til venstre for identitetstegnet etter funksjonssymbolet ξ i klausul (x) - (xvi) tilordnes rent mengdeteoretiske formler i L;ê.

§5.2 Et detaljert bevis for at MZFC er konsistent relativt til ZFC

La oss nå gi et helt detaljert bevis for at ξ avbilder ethvert aksiom i MZFC et teorem i ZFC. Dette er, som man skjønner, en langtekkelig oppgave siden vi må vise ξ overfører enhver instans av aksiomene P1 -P3, Q1,Q2, I1 - I5 og TA1 - TA27 på et teorem i ZFC.

Vi starter med de utsagnslogiske aksiomskjemaene i MZFC:

(Ad P1) Man har at P1 er skjemaet F → (G → F). Man har da at ξ(P1), i henhold til Definisjon 5.1.1, er (1) ξ(F)→(ξ(G) → ξ(F)). Siden ξ(F), ξ(G) er formler i L;e ser man (1) er en instans av aksiomskjemaet P1 i ZFC. ξ(P1) er derfor et teorem i ZFC.

(Ad P2) Man har at P2 i MZFC er skjemaet: (¬F → ¬G) → (G → F). Man har da ved hjelp av Definisjon 5.1.1 at ξ(P2) er (2) (¬ξ(F) → ¬ξ(G)) → (ξ(G) → ξ(F)). Man ser at (2) likeledes er en instans av aksiomskjemaet P2 i ZFC. ξ(P2) er derfor et teorem i ZFC.

(Ad P3) Man har at P2 i MZFC er skjemaet:

© 2012 Morten Harboe Rognes

(F →(G→H)) →((F→G) → (F →H)).

Man har da ved hjelp av Definisjon 5.1.1 at ξ(P3) er

(2) (ξ(F) →(ξ(G)→ξ(H))) →((ξ(F)→ξ(G)) → (ξ(F) →ξ(H))) . Man ser at (2) likeledes er en instans av aksiomskjemaet P3 i ZFC. ξ(P2) er derfor et teorem i ZFC.

Dermed har vi vist de setningslogiske aksiomene i MZFC overføres til teoremer i ZFC ved hjelp av avbildningen ξ.

La oss nå vende oss til de predikatlogiske aksiomene Q1 og Q2

(Ad Q1) Man har at Q1 i MZFC er skjemaet:

(Ax)F → F;x[t] hvor t er et variabeltegn i L;a.

Man har da ved hjelp av Definisjon 5.1.1 at ξ(Q1) er

(2) (Ax)ξ(F) →ξ(F;x[t]). Dette er i sin tur ekvivalent med

(3) (Ax)ξ(F) →ξ(F);x[t], siden man lett kan vise at ξ(F;x[t]) =ξ(F);x[t]. Man ser at (3) likeledes er en instans av aksiomskjemaet Q1 i ZFC. ξ(Q1) er derfor et teorem i ZFC.

(Ad Q2) Man har at Q2 i MZFC er skjemaet:

(Ax)(F →G) →(F→ (Ax)G) forutsatt at x er et variabeltegn som ikke forekommer fritt i formelen F.

Man har da ved hjelp av Definisjon 5.1.1 at ξ(Q2) er

(2) (Ax)(ξ(F) →ξ(G)) →(ξ(F)→ (Ax)ξ(G)) hvor x også må være et variabeltegn som ikke forekommer fritt i ξ(F). Dette forutsetter at dersom β er en formel hvor variabelen x ikke forekommer fri er heller ikke ξ(β) en formel hvor x forekommer fri. Vi overlater imidlertid til leseren å gi et bevis for denne påstand. Man ser at (2) likeledes er en instans av aksiomskjemaet Q2 i ZFC. ξ(Q2) er derfor et teorem i ZFC.

Vi tar nå for oss aksiomene om identitet i MZFC

(Ad I1) Vi har at I1 er den følgende formel:

(1) t1 =t1' & t2 = t2' & .... & tn = tn' → (Pt1...tn ↔ Pt1' ... tn') der det forutsettes at P er et n-ært predikat i L;a og t1,...,t, t1',...,tn' enten er variabeltegn eller termer i L;a (n>=1) Nå har man bare tre primitive predikater i L;a, nemlig At, ε og =. Det første av disse predikatene er unært. De to siste binære. For å vise at (1) holder kan man vise at (1) holder i hvert av disse tre tilfellene. Det vil altså være tilstrekkelig å vise at følgende holder:

(1.1) t=t' →. At(t) ↔ At(t') der t',t enten er variabler eller egenskapsabstrakter.

(1.2) t1=t1' & t2=t2' →. t1εt2 ↔ t1'εt2' der t1,t1',t2, t2' er variabler eller egenskapsabstrakter.

(1.3) t1=t1' & t2=t2' →. t1=t2 ↔ t1'=t2' der t1,t1',t2, t2' er variabler eller egenskapsabstrakter.

La oss først se på (1.1). Hvis man skal gi et detaljert bevis for denne påstand må man skille mellom fire tilfelle i det t kan være enten et variabeltegn eller et egenskapsabstrakt og det samme gjelder for t'. Vi ser bare på det tilfelle der t er et variabeltegn x og t' er et mengdeabstrakt λyα. De andre tilfellene overlater vi til leseren. I vårt tilfelle har vi da at (1.1) vil se slik ut:

x=λy(α) →. At(x) ↔ At(λyα)

La oss kalle denne formelen for δ. Da har man at ξ(δ) er den følgende formel, når man tar i betraktning klausul (ix), (x) og (xvi) i Definisjon 5.1.1:

(1) (Az)(zêx ↔ ξ(α)) →. x=x ↔Ey)((Ax)(xêy ↔ ξ(α))). Uansett hvordan ξ(α) ser ut ser man lett at (1) er et rent predikatlogisk teorem og derfor et teorem i ZFC.

La oss nå se på (1.2). Siden vi i dette tilfelle har med fire termer å gjøre som hver enten kan være en variabel eller et egenskapsabstrakt må man strengt tatt undersøke seksten tilfelle. Vi begrenser oss til å sjekke påstanden i bare ett av disse tilfellene, nemlig når t1=x, t1'=λy(α), t2= λy(β) og t2'=λy(δ). I dette tilfelle vil (1.2) se slik ut:

© 2012 Morten Harboe Rognes

(2) $x= \lambda y(\alpha) \,\&\, \lambda y(\beta) = \lambda y(\delta) \rightarrow x\varepsilon\lambda y(\beta) \leftrightarrow \lambda y(\alpha)\varepsilon\lambda y(\delta)$

Bruker man nå klausulene (x), (xii), (xiii) og (xv) Definisjon 5.1.1 ser man at $\xi((2))$ blir den følgende formel:

(2.1) $(Ay)(\hat{y}x \leftrightarrow \xi(\alpha)) \,\&\, (Ew)((Ay)(\hat{y}w \leftrightarrow \xi(\beta)) \,\&\, (Ay)(\hat{y}w \leftrightarrow \xi(\delta))). \rightarrow$
$(Ew)(x\hat{w} \,\&\, (Ay)(\hat{y}w \leftrightarrow \xi(\beta))) \leftrightarrow$
$(Ew)(Ez)(w\hat{z} \,\&\, (Ay)(\hat{y}w \leftrightarrow \xi(\alpha)) \,\&\, (Ay)(\hat{y}z \leftrightarrow \xi(\delta)))$

Vi må vise at (2.1) er et teorem i ZFC.

La oss først vise at (3) $(Ay)(\hat{y}x \leftrightarrow \xi(\alpha)) \,\&\, (Ew)((Ay)(\hat{y}w \leftrightarrow \xi(\beta)) \,\&\, (Ay)(\hat{y}w \leftrightarrow \xi(\delta))) \,\&\, (Ew)(x\hat{w} \,\&\, (Ay)(\hat{y}w \leftrightarrow \xi(\beta)))$

impliserer

(3.1) $(Ew)(Ez)(w\hat{z} \,\&\, (Ay)(\hat{y}w \leftrightarrow \xi(\alpha)) \,\&\, (Ay)(\hat{y}z \leftrightarrow \xi(\delta)))$

Fra den andre og tredje konjunkten i (3) kan vi slutte at det finnes w0 og w1 slik at

(4) $(Ay)(\hat{y}w0 \leftrightarrow \xi(\beta)) \,\&\, (Ay)(\hat{y}w0 \leftrightarrow \xi(\delta))$

(5) $x\hat{w}1 \,\&\, (Ay)(\hat{y}w1 \leftrightarrow \xi(\beta))$

Fra (4) og (5) følger $(Ay)(\hat{y}w0 \leftrightarrow \hat{y}w1)$. Fra dette og ekstensjonalitetsaksiomet i ZFC har vi w0=w1. Fra dette, (4), (5) og den første konjunkten i (3) følger:

(6) $x\hat{w}1 \,\&\, (Ay)(\hat{y}x \leftrightarrow \xi(\alpha)) \,\&\, (Ay)(\hat{y}w0 \leftrightarrow \xi(\delta))$. Men fra dette følger umiddelbart (3.1) ved eksistensiell generalisering.

La oss så vise at

(7.1) $(Ay)(\hat{y}x \leftrightarrow \xi(\alpha))$

(7.2) $(Ew)((Ay)(\hat{y}w \leftrightarrow \xi(\beta)) \,\&\, (Ay)(\hat{y}w \leftrightarrow \xi(\delta)))$

(7.3) $(Ew)(Ez)(w\hat{z} \,\&\, (Ay)(\hat{y}w \leftrightarrow \xi(\alpha)) \,\&\, (Ay)(\hat{y}z \leftrightarrow \xi(\delta)))$

impliserer

(8) $(Ew)(x\hat{w} \,\&\, (Ay)(\hat{y}w \leftrightarrow \xi(\beta)))$

Fra (7.2) og (7.3) følger at det finnes w0,w1 og z0 slik at

(9) $(Ay)(\hat{y}w0 \leftrightarrow \xi(\beta)) \,\&\, (Ay)(\hat{y}w0 \leftrightarrow \xi(\delta))$

(10) $w1\hat{z}0 \,\&\, (Ay)(\hat{y}w1 \leftrightarrow \xi(\alpha)) \,\&\, (Ay)(\hat{y}z0 \leftrightarrow \xi(\delta))$

Fra den andre konjunkten i (10) og (7.1) har vi (11) $(Ay)(\hat{y}w1 \leftrightarrow y\hat{x})$ og derfor ved hjelp av ekstensjonalitetsaksiomet at (12) x=w1. Fra den andre konjunkten i (9) og den siste konjunkten i (10) har man $(Ay)(\hat{y}w0 \leftrightarrow \hat{y}z0)$ og derfor (13) w0=z0. Fra (12),(13), den første konjunkten i (9) og den første konjunkten i (10) kan man så slutte at

$x\hat{w}0 \,\&\, (Ay)(\hat{y}w0 \leftrightarrow \xi(\beta))$. Herav følger så (8). Vi har dermed vist (2.1) er et teorem i ZFC.

(Ad I2) Aksiomet I2 MZFC er den følgende formel

(1) $t1 = t2 \rightarrow (Ex)(x=t1) \,\&\, (Ex)(x=t2)$

For å vise at $\xi((1))$ er et teorem i ZFC er det igjen nødvendig å skille mellom fire tilfelle ettersom t1 og t2 kan være et variabeltegn eller et egenskapsabstrakt av typen $\lambda y(\alpha)$. Vi ser bare på det tilfelle der t1=z og t2 er et abstrakt av formen $\lambda y(\alpha)$. I dette tilfelle blir (1) ovenfor seende slik ut:

(2) $z= \lambda y(\alpha) \rightarrow (Ex)(x=z) \,\&\, (Ex)(x=\lambda y(\alpha))$

Vi har at $\xi((2))$ er den følgende formel i L;ê i lys av klausul (x) i Definisjon 5.1.1

(3) $(Ay)(\hat{y}z \leftrightarrow \xi(\alpha)) \rightarrow. Ex(x=z) \,\&\, (Ex)((Ay)(\hat{y}x \leftrightarrow \xi(\alpha)))$

Men dette er åpenbart et rent teorem i predikatlogikken utvidet med identitet, i det aksiomet x=x impliserer (Ez)(z=x), og den andre konjunkten i konsekventen følger umiddelbart fra antesedenten. Vi konkluderer derfor med at ξ(I2) i alle tilfelle er et teorem i ZFC.

(Ad I3) I3 er den følgende formel i L;a: $(Ax)(x=x)$. Vi har i lys av Definisjon 5.1.1 at $\xi(Ax)(x=x)) = (Ax)(\xi(x=x)) = (Ax)(x=x)$. Det siste er et identitetsteoretisk aksiom i ZFC.

(Ad I4) I4 er den følgende formel i L;a:

© 2012 Morten Harboe Rognes

(1) $t1=t2 \ \& \ t2 = t3 \rightarrow t1=t3$

Igjen må man skille mellom i alt åtte tilfelle ettersom de diverse t1-t3 er enten er et variabeltegn eller et egenskapsabstrakt. Vi ser bare på det tilfelle at t1=x $t2=\lambda y(\alpha)$ og t3 =z. Da blir (1) seende slik ut:

(2) $x= \lambda y(\alpha) \ \& \ \lambda y(\alpha) = z \rightarrow x=z$

Vi har at $\xi((2))$ er den følgende formel i lys av Definisjon 5.1.1, klausul (i), (x), (xi):

(3) $(Ay)(\hat{y}x \leftrightarrow \xi(\alpha)) \ \& \ (Ay)(\hat{y}z \leftrightarrow \xi(\alpha)) \rightarrow x=z$

Fra antesedenten i (3) følger $(Ay)(\hat{y}x \leftrightarrow \hat{y}z)$. Fra dette og ekstensjonalitetsaksiomet i ZFC følger så x=z. (3) er derfor et teorem i ZFC. På lignende vis viser man i de andre tilfellene at ξ avbilder I4 på et teorem i ZFC.

(*Ad I5)* Når det gjelder aksiomene om identitet i MZFC gjenstår det nå bare å se på

(1) $t1=t2 \rightarrow t2 =t1$

Strengt tatt må man her ta i betraktning fire muligheter siden t1 kan være et variabeltegn eller et egenskapsabstrakt. Vi ser bare på det tilfelle både t1 og t2 er egenskapsabstrakter, nemlig:

(2) $\lambda x(\alpha) = \lambda y(\beta) \rightarrow \lambda x(\beta) = \lambda y(\alpha)$

I dette tilfelle har vi ved hjelp av definisjon 5.1.1 klausul (xii) at $\xi((2))$ er:

(3) $(Ew)(\ (Ax)(x\hat{w} \leftrightarrow \xi(\alpha)) \ \& \ (Ay)(y\hat{w} \leftrightarrow \xi(\beta))) \rightarrow$
$(Ew)(\ (Ay)(y\hat{w} \leftrightarrow \xi(\beta)) \ \& \ (Ax)(x\hat{w} \leftrightarrow \xi(\alpha)))$

Dette er åpenbart et teorem i predikatlogikken og derfor et teorem i ZFC. De resterende tilfelle overlates til leseren.

Etter at vi nå har betraktet de setningslogiske, predikatlogiske og identitetsteoretiske aksiomene i MZFC går vi nå over til aksiomene TA1 - TA27.

(Ad TA1) Man har at TA1 er den følgende formel:

(1) $Nec(F) \ \& \ Nec(F\rightarrow G) \rightarrow Nec(G)$ Betrakter man $\xi((1))$ og bruker klausul (vi) i Definisjon 5.1.1 ser man at $\xi((1))$ blir $\xi(F) \ \& \ \xi(F) \rightarrow \xi(G). \rightarrow \xi(G)$. Dette er en rent utsagnslogisk sannet og derfor et teorem i ZFC

(Ad TA2) Man har at TA2 er:

(1) $Pos(F) \rightarrow Nec(Pos(F)) \ \& \ (Nec(F) \rightarrow Nec(Nec(F)))$

Man ser lett at ved hjelp av Definisjon 5.1.1 at $\xi((1))$ i dette tilfelle blir:

(2) $\xi(F) \rightarrow \xi(F) \ \& \ \xi(F) \rightarrow \xi(F)$. Dette er åpenbart et teorem i ZFC.

(Ad TA3) TA3 er den følgende formel: $Nec(F) \rightarrow F$ Man har $\xi(Nec(F) \rightarrow F) = \xi(F) \rightarrow \xi(F)$, som man igjen umiddelbart forstår at er et teorem i ZFC.

(Ad TA4) Man har at $\xi((Ax)Nec(F) \leftrightarrow Nec((Ax)F) =$
$(Ax(\xi(Nec(F)) \leftrightarrow \xi(Nec((Ax)F)) = (Ax)\xi(F)) \leftrightarrow \xi((Ax)F) = (Ax)\xi(F) \leftrightarrow (Ax)\xi(F)$. Det siste er åpenbart et teorem i ZFC.

(Ad TA5) Det er klart at $\xi(Nec(F)) \leftrightarrow \neg Pos\neg(F)) = \xi(F) \leftrightarrow \neg\neg\xi(F)$. Det siste er et trivielt setningslogisk teorem og derfor et teorem i ZFC.

(Ad TA6) Man har $\xi(\ (x=y \rightarrow Nec(x=y)) \ \& \ (\neg(x=y) \rightarrow Nec(\neg(x=y))))$ er formelen: $(x=y \rightarrow x=y \ \& \ (\neg(x=y) \rightarrow \neg(x=y))$. Dette siste er åpenbart et teorem i ZFC.

(Ad TA7) Ved hjelp av Definisjon 5.1.1 har man at $\xi(At(y) \rightarrow Nec(At(y))) =$
$(y=y \rightarrow y=y)$ som man åpenbart innser er utledbart i ZFC.

(Ad TA8) Ved hjelp av Definisjon 5.1.1 har man at $\xi(At(y) \ \&x\varepsilon y \rightarrow At(x))$ er den følgende formel: $(y=y \ \& \ x\hat{y} \rightarrow x=x)$ som åpenbart er et teorem i ZFC.

(Ad TA9) Man har at $\xi(\ \neg At(y) \rightarrow Nec(\neg At(y)))$ i lys av Definisjon 5.1.1 åpenbart er den følgende formel, nemlig: $(\neg(y=y) \rightarrow \neg(y=y))$

(Ad TA10) Man har $\xi(x\varepsilon y \rightarrow At(y)) = (x\hat{y} \rightarrow y=y)$ som åpenbart lar seg utlede i ZFC. Videre har man at $\xi((Ax)(x\varepsilon\lambda y(\alpha) \rightarrow (Ez)(x\varepsilon z \ \& \ z=\lambda y(\alpha))))$ er den følgende formel: $(Ew)(x\hat{w} \ \& \ (Ay)(y\hat{w} \leftrightarrow \xi(\alpha))) \rightarrow (Ez)(x\hat{z} \ \& \ (Ay)(y\hat{z} \leftrightarrow \xi(\alpha))$. Dette er også et

© 2012 Morten Harboe Rognes

teorem i ZFC

(Ad TA11) Man har at ξ transformerer formelen

$$At(y) \& At(z) \& Nec((Ax)(x\varepsilon y \leftrightarrow x\varepsilon z)) \rightarrow y=z$$

til den følgende formel: $y=y \& z=z \& (Ax)(x\hat{e}y \leftrightarrow x\hat{e}z) \rightarrow y=z$. Dette er i sin tur ekvivalent med: $(Ax)(x\hat{e}y \leftrightarrow x\hat{e}z) \rightarrow y=z$. Dette er imidlertid ekstensjonalitetsaksiomet i ZFC og dermet en formel som åpenbart er utledbar i dette system.

(Ad TA12) I lys av klausul (xvi) i Definisjon 5.1.1 har man at ξ transformerer formelen $At(\lambda x(F(x))) \rightarrow (y\varepsilon\lambda x(F(x)) \leftrightarrow F(y))$ til den følgende formel i L;ê:

$(Ey)((Ax)(x\hat{e}y \leftrightarrow \xi(F(x)) \rightarrow .\ y\hat{e}z \& (Ez)((Ax)(x\hat{e}z \leftrightarrow \xi(F(x))) \leftrightarrow \xi(F(y))$

Man ser lett at høyre side i konsekventen i denne formelen impliserer den venstre side. Videre er det ganske åpenbart at antesedenten og venstre side i konsekventen impliserer høyre side i konsekventen. Formelen er derfor utledbar et teorem i ZFC.

(Ad TA13) I lys av Definisjon5.1.1, klausul (x) og (xiv) ser man at $\xi(\lambda x(F(x))\varepsilon y \rightarrow (Ez)(z=\lambda x(F(x)) \& z\varepsilon y))$ er den følgende formel:

$(Ew)((Ax)(x\hat{e}w \leftrightarrow \xi(F(x)) \& w\hat{e}y \rightarrow (Ez)((Ax)(x\hat{e}z \leftrightarrow \xi(F(x)))) \& z\hat{e}y)$. Ved variabelskifte i antesedenten ser man at dette er et rent predikatlogisk teorem og derfor også et teorem i ZFC.

(Ad TA14) Man har at $\xi(y= \lambda x(F(x)) \rightarrow Nec(y= \lambda x(F(x)))$ er $\xi(y= \lambda x(F(x))) \rightarrow \xi(y= \lambda x(F(x)))$ som åpenbart er et setningslogisk teorem. Videre har man at $\xi(y\neq \lambda x(F(x)) \rightarrow Nec(y\neq\lambda xF(x)))$ er $\xi(y\neq \lambda x(F(x)) \rightarrow \xi(y\neq \lambda x(F(x))$ som åpenbart er en tautologi og derfor et teorem i ZFC.

(Ad TA15) Ved hjelp av blandt annet klausul (x) i Definisjon 5.1.1 ser man at ξ tilordner $At(y) \rightarrow [Nec((Ax)(x\varepsilon y \leftrightarrow F(x))) \leftrightarrow y=\lambda x(F(x))]$ den følgende formel i L;ê:

$y=y \rightarrow (Ax)(x\hat{e}y \leftrightarrow F(x)) \leftrightarrow (Ax)(x\hat{e}y \leftrightarrow F(x))$. Dette er åpenbart et setnongslogisk teorem og derfor utledbar i ZFC.

(Ad TA16) Man har at ξ transformer formelen:

$$At(y) \rightarrow (Ez)(At(z) \& (Ax)(x\varepsilon z \rightarrow Nec(x\varepsilon z)) \& (Ax)(\neg(x\varepsilon z) \rightarrow Nec(\neg(x\varepsilon z)) \& (Aw)(w\varepsilon z \leftrightarrow w\varepsilon y))$$

til: $y=y \rightarrow (Ez)(z=z \& (Ax)(x\hat{e}z \rightarrow x\hat{e}z) \& (Ax)(\neg(x\hat{e}z) \leftrightarrow \neg(x\hat{e}z)) \& (Aw)(w\hat{e}z \rightarrow w\hat{e}y)$. Denne siste formelen er ekvivalent med: $(Ez)((Aw)(w\hat{e}z \leftrightarrow w\hat{e}y))$ som er et rent predikatlogisk teorem i ZFC

(Ad TA17) Ved hjelp av Definisjon 5.1.1, klausul (x) og (xvi) har man at

$\xi[\ At(\lambda x(F(x))) \leftrightarrow (Ey)(y= \lambda x(F(x)))]$ er den følgende formel:

$(Ey)((Ax)(x\hat{e}y \leftrightarrow \xi(F(x)))) \rightarrow (Ey)((Ax)(x\hat{e}y \leftrightarrow \xi(F(x))))$ Dette er åpenbart et teorem i ZFC siden det er en setningslogisk sannhet.

(Ad TA18) Man har at $\xi(At(z) \rightarrow At(\lambda x(x\varepsilon z \& F(z))))$ er identisk med følgende formel i L;ê: $z=z \rightarrow (Ey)((Ax)(x\hat{e}y \leftrightarrow x\hat{e}z \& \xi(F(z)))$. Denne formelen er ekvivalent med $(Ey)((Ax)(x\hat{e}y \leftrightarrow x\hat{e}z \& \xi(F(z)))$ som åpenbart er en instans av utsondringsaksiomet i ZFC.

(Ad TA19) Ved hjelp av Definisjon 5.1.1, klausul (xvi) ser man at ξ avbilder $At(\lambda x(\neg(x=x)))$ på den følgende formel i L;e, nemlig:

$(Ew)((Ax)(x\hat{e}w \leftrightarrow \neg(x=x))$. Som man ser er dette nullmengde aksiomet i ZFC.

(Ad TA20) Man ser at den formelen som ξ avbilder

$$At(z) \& At(w) \rightarrow At(\lambda x(x=z \vee x=w))$$

på i L;ê er $z=z \& w=w \rightarrow (Ey)((Ax)(x\hat{e}y \leftrightarrow x=z \vee x=w))$. Dette følger umidelbart fra parmengde-aksiomet i ZFC.

(Ad TA21) Vi har at $\xi[At(w) \rightarrow At(\lambda x(At(x) \& Nec((Az)(z\varepsilon x \rightarrow z\varepsilon w))))]$ er den

© 2012 Morten Harboe Rognes

følgende formel i L;ê:

w=w → (Ey)(((Ax)(xêy ↔ (x=x) & (Az)(zêx → zêw)). Dette kan lett utledes fra potensmengdeaksiomet i ZFC, nemlig: (Ey)((Ax)(xêy ↔ (Az)(zêx → zêw)))

(Ad TA22) Man har at ξ[At(z) → At(λx((Ew)(xεw & wεz)))] er formelen:

z=z → (Ey)((Ax)(xêy ↔ (Ew)(xêw & wêz))). Denne formelen følger umiddelbart fra foreningsmengdeaksiomet i ZFC og er derfor selvfølgelig et teorem i ZFC.

(Ad TA23) Man kan lett sjekke at ξ avbilder

(Ew)(At(w) & Nec(λx(¬(x=x))εw & (Ay)(yεw & At(y) →
(Ez)(At(z) & zεw & Nec((Au)(uεz ↔ uεy v u=y))))))

på en formel som er ekvivalent med uendelighetsaksiomet i ZFC, nemlig:

(Ew)((Ey)(yêw &(Ax)(xêy ↔ x≠x)) &
(Ay)(yêw → (Ez)(zêw & (Au)(uêz ↔ uêyv u=y))

(Ad TA24) Man ser lett at ξ avbilder formelen

At(x) &(Ey)(yεx) → (Ez)(zεx & ¬(Ew)(wεz & wεx))

på en formel som er ekvivalent med Fundierungsaksiomet i ZFC

(Ad TA25) Man ser at formelen:

(1) [At(a) & (Ax)(Ay)(F(x,y) → At(x)& At(y)) &
(Ax)(Ay)(Az)(F(z,x) & F(z,y) → x=y)]→
(Eb)(At(b) & (Ax)(xεb ↔ (Ey)(yεa & F(y,x)))

er motstykke til erstatningsaksiomet i ZFC og at ξ avbilder denne formelen på en formel i L;e som er predikatlogisk ekvivalent med denne.

(Ad TA26) La oss betrakte:

(1) Nec((Ex)(Set(x) & (Ay)(yεx ↔ F(y)))) → At(λy(Fy))

I lys av definisjonen Set(x) ser man at ξ(Set(x)) er en formel som er predikatlogisk ekvivalent med x=x. Dette innebærer at ξ(1) er ekvivalent med følgende teorem i predikatlogikken, som selvfølgelig lar seg utlede ZFC:

(Ex)(Ay)(yêx↔ξ(F(y)) → (Ex)(Ay)(yêx↔ξ(F(y))

(Ad TA27) Man ser meget lett at resultatet av å anvende ξ på TA27 er ekvivalent med

(1) x=x & (Ey)(yêx)& (Ay)(yêx → (Ez)(zêy)) &
(Az)(Aw)(z,wêx → (r)(rêz↔rêw) v ¬(Er)(rêz&rêw)).
→ (Eu)(At(u) & (Ay)(yêx ↔ (Ev)(At(v) &(As)(sêu & sêy ↔ s=v)))

Dette er en formel som er predikatlogisk ekvivalent med utvalgsaksiomet i ZFC.

(Ad TA28) Man ser også ganske lett at resultatet av å anvende ξ på TA28 er ekvivalent med

(1) (Ey)(yêx) →(Ez)(zêx &¬(Ew)(wêz & wêx))

Dette er en formel som er predikatlogisk ekvivalent med regularitetsaksiomet i ZFC.

(Ad TA29) Anvender man ξ på TA29 får man

ξ(At(x) → At(λy(Pos(yεx)))) = x=x → (Ew)((Ay)(yêw ↔ yêx))

Men man ser at x=x → (Ew)((Ay)(yêw ↔ yêx)) er et rent predikatlogisk teorem. Vi har derfor at ξ(TA29) er et teorem i ZFC.

(Ad TA30) Anvender man ξ på TA30 får man

ξ(At(x) → At(λy(Pos(yεx)))) =
x=x → (Ew)((Ay)(yêw ↔ (Ez)(yêx & zêx)))

Men man ser at x=x → (Ew)((Ay)(yêw ↔ (Ez)(yêx & zêx))) er et ekvivalent med

© 2012 Morten Harboe Rognes

foreningsmengdeaksiomet i ZFC. Vi har derfor at ξ(TA30) er et teorem i ZFC.

Vi har nå vist at ξ avbilder absolutt alle aksiomene i MZFC på teoremer i ZFC. I MZFC har vi tre slutningsregler, nemlig modus ponens, universell generalisering og nødvendighetsregelen:

(R1) $\vdash\alpha \ \& \vdash(\alpha\rightarrow\beta) \rightarrow \vdash\beta$
(R2) $\vdash\alpha \rightarrow \vdash(Ax)\alpha$
(R3) $\vdash\alpha \rightarrow \vdash Nec(\alpha)$

Når ξ anvendes på disse reglene får man:

(R1') $\vdash \xi(\alpha) \ \& \vdash (\xi(\alpha)\rightarrow\xi(\beta)) \rightarrow \vdash \xi(\beta)$
(R2') $\vdash \xi(\alpha) \rightarrow \vdash ((Ax)\xi(\alpha)$
(R3') $\vdash \xi(\alpha) \rightarrow \vdash \xi(\alpha)$

Man ser at (R1') - (R3') også er slutningsregler i ZFC. Dette innebærer at man kan slutte at dersom α er et teorem i MZFC så er ξ(α) et teorem i ZFC. Dette i sin tur innebærer at dersom α & ¬α hadde vært et teorem i MZFC ville ξ(α)& ¬ξ(α) være et teorem i ZFC. Dette innebærer at MZFC er konsistent relativt til ZFC.

§6 Grunnleggende begreper og teoremer i MZFC

I dette avsnittet skal vi introdusere de vanlige begrepene man støter på innenfor mengdelæren i systemet MZFC. La oss gjøre oppmerksom på at vi i det følgende bruker a, b, c, a', b' .... etc som syntaktiske variabler for termer i vid betydning. En term i vid betydning er enten et variabeltegn, et egenskapsabstrakt eller et mengdeabstrakt.

Vi starter med å definere predikatet "x er en mengde" som vi forkorter med "Set(x)". En mengde er en egenskap som har den samme ekstensjon i enhver verden. Anta x er en egenskap. Skal den da ha samme ekstensjon i enhver verden er det nødvendig at ethvert objekt som har egenskapen x nødvendigvis har denne egenskap. Videre er det nødvendig at ethvert objekt som ikke har egenskapen er slik at det er logisk nødvendig at det ikke har egenskapen. Disse to betingelsene er også tilstrekkelige for at en egenskap skal ha den samme ekstensjon i enhver verden og derfor kunne identifiseres som en mengde.

Definisjonen av predikatet "Set(x)" kan derfor formuleres slik:

Definisjon 6.1
$Set(a) \leftrightarrow .\ At(a) \ \& \ (Ay)(y\varepsilon a \rightarrow Nec(y\varepsilon a)) \ \& \ (Ay)(\neg(y\varepsilon a) \rightarrow Nec(\neg(y\varepsilon a)))$

Vi skal si at *a er bestemt* om det er sant at den andre og tredje konjunkten i høyre side i definisjonen ovenfor holder. Med andre ord har vi at a er bestemt, i symboler Det(a), hvis og bare hvis $Ay)(y\varepsilon a \rightarrow Nec(y\varepsilon a)) \ \& \ (Ay)(\neg(y\varepsilon a) \rightarrow Nec(\neg(y\varepsilon a)))$. En mengde er derfor en egenskap som er bestemt.

Vår neste definisjon er en standarddefinisjon av en del vanlige mengdeteoretiske begreper:

Definisjon 6.2
Anta a,b er termer i vid betydning. Da setter vi:
(a) $ø = \{x:x\neq x\}$

© 2012 Morten Harboe Rognes

(b) $\{a\} = \{x: y=a\}$
(c) $\{a,b\} = \{z: z=a \vee z=b\}$
(d) $\langle a,b\rangle = \{\{a\},\{a,b\}\}$
(e) $a \cup b = \{x: x\varepsilon a \vee x\varepsilon b\}$
(f) $a \Omega b = \{x: x\varepsilon a \& x\varepsilon b\}$
(g) $UN(a) = \{x: (Ey)(x\varepsilon y \& y\varepsilon a\}$
(h) $a \text{ Inkl } b \leftrightarrow Nec((Ax)(x\varepsilon a \rightarrow x\varepsilon b))$
(i) $SN(a) = \{x: (Ay)(y\varepsilon a \rightarrow x\varepsilon y)\}$

Når det gjelder denne definisjonen ser man at definisjonene av nullmengden, enhetsmengden som inneholder a, parmengden som inneholder a og b, det ordnete par som har a som første komponent og b som andre komponent, samt definisjonene av snitt og union av to entiteter a og b, er de helt vanlige. Dette gjelder også definsjonene av unionen av alle de elementene som har egenskapen a, UN(a), og snittet av alle objektene som har egenskapen a, SN(a). Den eneste av disse definisjonene som avviker fra det vanlige er definisjonen av inklusjon. At a Inkl b innebærer, slik vi har definert dette begrepet at ekstensjonen til egenskapen a er inkludert i ekstensjonen til egenskapen b i enhver verden, med andre ord at det er logisk nødvendig at enhver entitet som har egenskapen a også har egenskapen b. Vi skal senere innføre en svakere relasjon, a Inkl;e b som holder hvis og bare hvis det bare faktisk er slik at enhver entitet som har egenskapen a også har egenskapen b. a Inkl;e b er altså ekvivalent med at $(Ax)(x\varepsilon a \rightarrow x\varepsilon b)$.

Det følgende teorem uttrykker at nullmengden er en mengde og at det samme gjelder $\{x\}$ og $\{x,y\}$ sant x,y er egenskaper:

Teorem 6.1 (a) $Set(ø)$
(b) $At(x) \rightarrow Set(\{x\})$
(c) $At(x) \& At(y) \rightarrow Set(\{x,y\})$

Bevis: *(a)* Man har i lys av definisjonen av Set at
(1) $Set(ø) \leftrightarrow. At(ø) \& (Ax)(x\hat{e}ø \rightarrow Nec(x\hat{e}ø)) \& (Ax)(\neg(x\hat{e}ø) \rightarrow Nec(\neg(x\hat{e}ø))$.
Nå har man i lys av Definisjon 4.1.1 og Definisjon 6.2 at
(2) $At(ø) \leftrightarrow At(\{x:x\neq x\}) \leftrightarrow At(\lambda x(x\neq x))$. TA19 sier at (3) $At(\lambda x(x\neq x))$. Det følger derfor at (4) $At(ø)$. Nå har man videre i lys av Definisjon 6.2 og Definisjon 4.1.1 at
(5) $x\hat{e}ø \leftrightarrow x\hat{e}\{x:x\neq x\} \leftrightarrow x\neq x$ Videre har man fra dette: (6) $\neg(x\hat{e}ø) \leftrightarrow x=x$. Vi har derfor i lys av (5) og (6) at de to siste konjunktene i høyre side i (1) er ekvivalente med:
$(Ax)(x\neq x \rightarrow Nec(x\neq x)) \& (Ax)(x=x \rightarrow Nec(x=x))$. Men dette er TA6. Det følger fra dette og (4) at høyre side i (1) holder. Dette viser i sin tur at (a) holder.

(b) Anta (1) At(x). Vi skal vise $Set(\{x\})$. I lys av definisjonen av Set vil det være tilstrekkelig å vise:
(2.1) $At(\{x\})$
(2.2) $(Ay)(y\hat{e}\{x\} \rightarrow Nec(y\hat{e}\{x\})$
(2.3) $(Ay)(\neg(y\hat{e}\{x\}) \rightarrow Nec(\neg(y\hat{e}\{x\}))$
Fra TA20 følger (3) $At(x) \rightarrow At(\lambda y(y=xvy=x))$. Fra dette og (1) følger (4) $At(\lambda y(y=xvy=x))$ I lys av TA17 at (4) er ekvivalent med (5) $z = \lambda y(y=xvy=x)$ Fra dette og (4) har vi videre ved hjelp av identitetsaksiomene at (6) A(z). Ved hjelp av TA15 har man
(7.1) $At(z) \rightarrow [Nec((Ay)(y\varepsilon z \leftrightarrow y=xvy=x)) \leftrightarrow z=\lambda y(y=xvy=x)]$

© 2012 Morten Harboe Rognes

(7.2) $At(z) \rightarrow . \; Nec((Ay)(y\varepsilon z \leftrightarrow y=x)) \leftrightarrow z=\lambda y(y=x)$

Siden vi åpenbart har $Nec((Ay)(y=x \leftrightarrow y=xvy=x))$ følger ved hjelp av (6), (7.1) og (7.2) at $z=\lambda y(y=xvy=x) \; \& \; z=\lambda y(y=x)$. Herav har vi så ved hjelp av (4) og identitetsaksiomene at $At(\lambda y(y=x))$. Ved hjelp av Definisjon 4.1.1 og definisjonen av {x} følger herav (2.1).

I kraft av definisjonen av {x} og Definisjon 4.1.1 har man at "yê{x}" ikke er annet enn en forkortelse for y=x. Konjunksjonen av formlene (2.2) og (2.3) er derfor ikke noe annet enn TA6 i en litt annet forkledning. Dette viser at også (2.1) - (2.3) holder og derfor at punkt (b) i teoremet holder.

(c) Anta (1) At(x) & At(y). I lys av definisjonen av Set vil det være tilstrekkelig å vise:

(2.1) $At(\{x,y\})$

(2.2) $(Az)(z\hat{e}\{x,y\} \rightarrow Nec(z\hat{e}\{x,y\})$

(2.3) $(Az)(\neg(z\hat{e}\{x,y\}) \rightarrow Nec(\neg(z\hat{e}\{x,y\}))$

Fra (1) og aksiomet TA20 følger (3) $At(\lambda z(z=xvz=y))$. Fra dette kan man ved hjelp av Definisjon 4.1.1 og definisjonen av {x,y} slutte at (2.1) holder. "zê{x,y}" forkorter "zê{w: w=x vw=y}" som i sin tur, i henhold til Definisjon 4.1.1 forkorter " z=x v z=y". For å vise at (2.2) og (2.3) holder vil det derfor være tilstrekkelig å vise:

(3.1) $(Az)(z=x \; vz=y \rightarrow Nec(z=x \; v \; z=y))$ og

(3.2) $(Az)(\neg(z=xvz=y) \rightarrow Nec(\neg(z=x \; v \; z=y)))$

La oss vise (3.1) Anta z=x v z=y. Er z=x har vi ved hjelp av TA6 at Nec(z=x) og derfor at Nec(z=x v z=y). Har man på den annen side følger på samme måte Nec(z=xvz=y). Dette viser at (3.1) holder. La oss tilslutt vise (3.2) Anta (4) $z \neq x \; \& \; z \neq y$ og anta for reduktio at $\neg Nec(\neg(z=x \; vz=y)$. Dette siste er ekvivalent med $Pos(z=xvz=y)$ og derfor ekvivalent med (5) Pos(z=x) v Pos(z=y). Men fra (4) og TA6 følger $Nec(z \neq x) \; \& \; Nec(z \neq y)$. Dette strider mot (5). Dette viser at (3.2) holder. Vi har dermed også gitt et bevis for punkt (c). **QED**.

Det følgende teorem viser hvordan egenskapsabstrakter av typen $\lambda x(\alpha)$, kan fjernes i alle kontekster hvor de forekommer:

Lemma 6.1 (Eliminasjonslemma for egenskapsabstrakter)

(a) $At(\lambda x(\alpha)) \leftrightarrow (Ey)(At(y) \; \& \; Nec((Ax)(x\varepsilon y \leftrightarrow \alpha)))$

(b) $\lambda x(\alpha) = \lambda y(\beta) \leftrightarrow (Ew)(Nec((Ax)(x\varepsilon w \leftrightarrow \alpha)) \; \& \; Nec((Ay)(y\varepsilon w \leftrightarrow \beta)))$

(c) $y= \lambda x(\alpha) \leftrightarrow Nec((Ax)(x\varepsilon y \leftrightarrow \alpha))$

(d) $\lambda x(\alpha) =y \leftrightarrow Nec((Ax)(x\varepsilon y \leftrightarrow \alpha))$

(e) $\lambda x(\alpha) \; \hat{e} \lambda y(\beta) \leftrightarrow (Ez)(Ew)(z\varepsilon w \; \& \; Nec((Ax)(x\varepsilon z \leftrightarrow \alpha)) \; \& \; Nec((Ay)(y\varepsilon w \leftrightarrow \beta))$

(f) $x\hat{e}\lambda y(\beta) \leftrightarrow (Ez)(x\varepsilon z \; \& \; Nec((Ay)(y\varepsilon z \leftrightarrow \beta)))$

(g) $\lambda x(\alpha) \; \hat{e}y \leftrightarrow (Ez)(z\varepsilon y \; \& \; Nec((Ax)(x\varepsilon z \leftrightarrow \alpha)$

Bevis: *Ad (a)* Anta (1) $At(\lambda x(\alpha))$ Da Har vi ved hjelp av TA17 at (2) $y=\lambda x(\alpha)$ for noe y. Fra (1), (2) følger ved hjelp av identitetsaksiomene (3) At(y). Fra (2), (3) kan man ved hjelp av TA15 slutte $Nec((Ay)(x\varepsilon y \leftrightarrow \alpha))$. Fra dette og (3) følger så venstre side i (a).

Anta på den annen side (4) $At(y) \; \& \; Nec((Ax)(x\varepsilon y \leftrightarrow \alpha))$ for noe y. Fra dette kan man ved hjelp av TA15 slutte at $y=\lambda x(\alpha)$. Fra dette og den første konjunkten i (4) følger ved hjelp av identitetsaksiomene at $At(\lambda x(\alpha))$. Dette viser at (a) holder.

Ad (b) Anta (1) $\lambda x(\alpha) = \lambda y(\beta)$. Da har vi ved hjelp av I2 at det finnes z og w slik at (2) $z= \lambda x(\alpha) \; \& \; w=\lambda y(\beta)$. Fra dette, TA17 og I1 kan man slutte (3) $At(z) \; \& \; At(w)$. Fra dette, (2) og TA15 kan man i sin tur slutte:

© 2012 Morten Harboe Rognes

(4) Nec((Ax)(xεz ↔ α)) & Nec((Ay)(yεw ↔ β). Fra (2) kan man ved hjelp av identitetsaksiomene slutte z=w. Fra dette og (4) følger så høyre side i (b).

Antar man på den annen side at (5) Nec((Ax)(xεw ↔α)) & Nec((Ay)(yεw ↔β)) holder for noe w, har man ved hjelp av TA7 at At(w). Fra dette , (5) og TA15 kan man slutte w=λx(α) & w=λy(β). Herav følger så ved hjelp av I4 og I5 at λx(α) = λy(β).

Ad (c) Anta y= λx(α). Da har vi ved hjelp av TA14 og identitetsaksiomene at At(y). Fra dette, TA15 og det at y=λx(α) følger så Nec((Ax)(xεy↔ α)). Har vi på den annen Nec((Ax)(xεy ↔ α) følger fra dette og TA7 at At(y) & Nec((Ax)(xεy ↔ α). Fra dette kan man ved hjelp av TA15 slutte at y=λx(α). Dette viser at (c) holder.

Ad (d) Dette punktene følger umiddelbar fra (c) og det at identitetsrelasjonen er transitiv.

Ad (e) Anta (1) λx(α) ελy(β). Fra dette og I2 følger at det finnes z,w slik at (2) z=λx(α) & w= λy(β). Videre følger ved hjelp av TA7 at (3) At(z) & At(w)
Fra (3) og (2) kan man ved hjelp av TA15 slutte at

(4) Nec((Ax)(xεz ↔ α)) & Nec((Ay)(yεw↔β)

Fra (2) og (1) følger zêw ved hjelp av I1. Fra dette og (4) følger så høyre side i punkt(e).

Anta på den annen side at zεw & Nec((Ax)(xεz ↔α)) & Nec((Ay)(yεw ↔β) holder for noe z og w. Da har vi ved hjelp av TA7 at At(z) og At(w), og derfor ved hjelp av TA15 at z=λx(α) og w=λy(β). Fra dette, det at zεw og I1 kan man så slutte λx(α) ελy(β). Dette viser at punkt (e) holder.

Ad (f), (g) Disse punktene i satsen bevises på samme måte som punkt (e).
Vi har dermed levert et fullstendig bevis for teoremet. **QED**.

Det følgende teorem er analogt med Lemma 6.1 og viser hvordan man i prinsippet kan greie seg uten mengdeabstrakter. Det er strengt tatt et ganske enkelt korollar til Definisjon 4.1.1 i §4:

Lemma 6.2 (Eliminasjonslemma for mengdeabstrakter)

(a) At({x:α}) ↔ (Ey)(At(y) & Nec((Ax)(xεy ↔ α))
(b) {x:α} = {x:β} ↔ (Ax)(α ↔ β)
(c) y= {x:α} ↔ Nec((Ax)(xεy ↔ α))
(d) {x:α}= y ↔ Nec((Ax)(xεy ↔ α))
(e) yε{x:α} ↔ α;x[y]
(f) {x:α}êy ↔ (Ez)(zεy & Nec((Ax)(xεz ↔ α)))

Bevis: *Ad (a)* Anta (1) At({x:α}). I lys av Definisjon 4.1.1 forkorter (1) den følgende formel: (2) At(λx(α)). Fra (2) og TA17 følger at det finnes y slik at (3) y=λx(α). Fra dette og (2) følger ved hjelp av I1 at (4) At(y) som sammen med (3) TA15 impliserer Nec((Ax)(xεy ↔ α)). Herav kan man sammen med (4) slutte at høyre side i (a) holder. La oss vise kondisjonalen den andre veien. Anta det finnes y slik at At(y) & Nec((Ax)(xεy↔α)). Ved hjelp av TA15 har man herav y=λx(α) som sammen med det at At(y) gir en At(λx(α)). Herav At({x: α}) siden dette er en forkortelse for At(λx(α)).

Ad (b) Dette er opplagt i lys av klausul (iv) i Definisjon 4.1.1.

Ad (c) Anta (1) y= {x: α}. Ved hjelp av Definisjon 4.1.1 følger fra dette at (1) At(y) & y=λx(α) for noe y. Ved hjelp av TA15 følger herav Nec((Ax)(xêy ↔ α)). Har vi på den annen side Nec((Ax)(xêy ↔ α)) følger ved hjelp av TA7 at At(y) og derfor ved hjelp av TA15 at (Ez)(At(z) & z=y & z=λx(α)). Fra dette og Definisjon 4.1.1 at y= {x:α}.

© 2012 Morten Harboe Rognes

Ad (d). Dette bevises på samme måte som punkt (c) i stedet for at man nå bruker klausul (ii) i Definisjon 4.1.1.

Ad (e) Dette er opplagt i lys av (iv) i Definisjon 4.1

Ad (f) Dette følger fra ved hjelp av klausul (vii) i Definisjon4.1.1 og punkt (c) ovenfor. **QED**.

Det følgende teorem sammenfatter endel viktige prinsipper vedrørende mengdeabstrakter og egenskapsabstrakter. Generelt kan man fra en formel av typen (Ax)α bare slutte α;x[t], der t er et egenskapsabstrakt, om man forutsetter det finnes noe som er identisk med t, med andre ord bare om man forutsetter at (Ex)(x=t). Det samme gjelder eksistensiell generalisering. Forholdet er helt analogt når det gjelder mengdeabstrakter. Videre viser teoremet at man bare har at λx(α)=λx(β) om α er strengt ekvivalent med β, ie. om Nec((Ax)(α↔β)) og man dessuten har at (Ex)(x=λx(α)). Videre sier teoremet at dersom t=t', der t,t' enten er variabeltegn eller egenskapsabstrakter, så har man at α;x[t] er ekvivalent med α;x[t']:

Teorem 6.2

(a) Nec((Ax)(α↔β)) & (Ey)(y = λx(α)) → λx(α) = λx(β)

(b) At(λx(α)) & Nec((Ax)(α ↔β)) → λx(α) =λx(β)

(c) Anta t,t' enten er variabeltegn eller egenskapsabstrakter. Da holder
t=t' → α;x[t] ↔ α;x[t']

(d) (Ey)(y={z:α }) & Nec({z:α}={z:β}). → δ;x[{z:α}] ↔ δ;x[{z:β}]

(e) (Ey)(y={z:α }) → (Ax)δ → δ;x[{z:α}]

(f) (Ey)(y={z:α }) →. δ;x[{z:α}] → (Ex)δ

Anta a og b er termer i vid betydning. Da gjelder:

(g) Nec(a = b) & At(a) → At(b)

(h) Nec(a = b) & Set(a) → Set(b)

Vi har:

(i) (Ax)(Nec(α) v Nec(¬α)) & At(λx(α)) → Set(λx(α))

Beviset for denne satsen er meget langt siden vi må vise i alt ni forskjellige påstander. Dessuten må vi, for eksempel ved påstand (c), skille mellom en lang rekke tilfelle ettersom t og t' kan være variabeltegn eller egenskapsabstrakter. Det samme gjelder (g) og (h). Her må vi betrakte diverse tilfeller alt ettersom a,b er variabeltegn, mengdeabstrakter eller egenskapsabstrakter.

Bevis: *Ad (a):* Anta (1) Nec((Ax)(α↔β)) og (2) (Ey)(y=λx(a)). Da har man at det finnes y der (3) y= λx(α). Videre følger fra (2) og TA17 at At(λx(α)). Fra dette , (3) og identitetsaskiomene kan man slutte (4) At(y). Fra (4) og TA15 følger:

(5) Nec((Ax)(xεy ↔ α)) ↔ y=λx(α)

(6) Nec((Ax)(xεy ↔ β)) ↔ y=λx(β)

Fra (1) følger: Nec((Ax)(xεy ↔ α)) ↔ Nec((Ax)(xεy ↔ β)). Fra dette (5) og (6) har man: y= λx(α) ↔ y=λx(β). Herav følger sammen med (3) y=λx(α) & y= λx(β) Fra dette og identitetsaksiomene følger: λx(α) = λx(β). Dette viser at (a) holder.

Ad (b): Dette er et enkelt korollar til punkt (a). Anta (1) At(λx(α)) & Nec((ax)(α↔β)) Fra den første konjunkten her følger ved hjelp av TA17 (Ey)(y=λx(α)). Fra dette, den andre konjunkten i (1) og punkt (a) følger så λx(α) = λx(β).

© 2012 Morten Harboe Rognes

Ad (c): Anta t,t' er variabeltegn eller egenskapsabstrakter. Satsen bevises ved induksjon på lengden av formler i α.

(i) α er en atomær formel. Da er α enten en formel av typen At(x), x=y, y=x, xεy eller yεx. Strengt tatt må man vise at satsen holder i alle disse fem tilfellene. I tillegg må man for hvert av disse tilfellene skille mellom fire undertilfelle alt ettersom t,t' er variabeltegn eller egenskapsabstrakter. Det kan neppe være nødvendig å gjøre det så detaljert. Vi ser på tre av hovdtilfellene og to av undertilfellene.

Tilfelle 1: α= At(x).

Undertilfelle 1.1: t=y og t'=λz(β). Da har man at forutsetningen i teoremet er (1) y=λz(β). Videre har man at α;x[t] = At(y) & α;x[t'] = At(λz(β)). Fra identitetsaksiomet I1 har vi imidlertid y=λz(β) → .At(y) ↔ At(λz(β)). Satsen holder derfor i dette tilfelle.

Undertilfelle 1.2: t=λz(δ) og t'= λz(β). Da har man åpenbart at α;x[t] = At(λz(δ)) & α;x[t'] = At(λz(β)). Men ved hjelp av aksiomet I1 har man åpenbart

λz(δ)=λz(β) →. At(λz(δ) ↔ At(λz(β)) Satsen holder derfor uten videre i dette tilfellet. Vi overlater til leseren å undersøke de andre tilfellene, og konkluderer derfor med at satsen holder dersom α= At(x)

Tilfelle 2: α er x=y Undertilfelle 2.1: t er et variabeltegn, la oss si z, og t' er et mengdeabstrakt, la oss si λy(β). Da har vi ved hjelp av I1 at

z=λy(β) → z=y ↔ λy(β)=y. Man ser at satsen derfor holder i dette tilfellet.

Undertilfelle 2.2 t=λz(δ) og t'= λz(β). Da har man åpenbart at α;x[t] er λz(δ))=y og at α;x[t'] er λz(β)=y. Men i kraft av I1 har man

λz(δ)=λz(β) → λz(δ)=y ↔ λy(β)=y Man ser at satsen holder i dette tilfellet. De andre undertilfellene 2.3 og 2.4 vises lett på samme måte ved hjelp av I1.

Tilfelle 3: α er av formen xεz. Undertilfelle 3.1 t=y og t'=λz(β) Da har man at forutsetningen i teoremet er (1) y=λz(β). Videre har man at α;x[t] = yεz og α;x[t'] = λz(β)εz. Fra identitetsaksiomet I1 har vi imidlertid y=λz(β) → .yεz ↔ λz(β))εz. Satsen holder derfor i dette undertilfellet. Undertilfelle 3.2: t=λz(δ) og t'= λz(β). Da har man åpenbart at α;x[t] = λz(δ)εz & α;x[t'] = λz(β)εz. Men ved hjelp av aksiomet I1 har man åpenbart λz(δ)=λz(β) →. λz(δ)εz ↔ λz(β)εz. Satsen holder derfor uten videre i dette tilfellet. Vi overlater til leseren å undersøke de andre tilfellene, og konkluderer derfor med at satsen holder dersom α=xεz.

Vi overlater til leseren å undersøke tilfelle der α er y=x eller yεx.

(ii) α = βaδ for visse formler β,δ der a står for enten v, &, → eller ↔. Etter induksjonshypotesen har vi at satsen holder for β og δ. Med andre ord holder:

(1) t=t' → β;x[t] ↔ β;x[t']
(2) t=t' → δ;x[t] ↔ δ;x[t'] Man har da ved hjelp av (1) og (2):
(3) t=t' → . β;x[t]a δ;x[t] ↔ β;x[t]a δ;x[t]
→ . (βaδ);x[t] ↔ (βaδ);x[t ']
→. α;x[t] ↔ α;x[t']

Man ser at satsen holder for α=(βaδ) om den holder for β og δ

(iii) α = (Ay)β. Siden satsen holder for β har vi

(1) t=t' → β;x[t] ↔ β;x[t']. Men da
(2) t=t' → (Ay)(β;x[t]) ↔ (Ay)(β;x[t'])
→ ((Ay)β);x[t] ↔ ((Ay)β);x[t']
→ α;x[t] ↔ α;x[t']

Man ser altså at satsen holder for α = (Ax)β om den holder for β.

(iv) α = (Ex)β. Dette tilfellet behandles på samme måte som det foregående.

(v) α = ¬β. Siden satsen holder for β har vi

© 2012 Morten Harboe Rognes

(1) $t=t' \rightarrow \beta;x[t] \leftrightarrow \beta;x[t']$. Men da

(2) $t=t' \rightarrow \neg(\beta;x[t]) \leftrightarrow \neg(\beta;x[t'])$
$\rightarrow (\neg\beta);x[t] \leftrightarrow ((\neg\beta);x[t']$
$\rightarrow \alpha;x[t] \leftrightarrow \alpha;x[t']$

Dette viser at satsen holder i dette tilfelle.

(vi) $\alpha = Nec(\beta)$. Siden satsen etter induksjonshypotesen skal holde for β har vi at følgende er et teorem: (1) $t=t' \rightarrow \beta;x[t] \leftrightarrow \beta;x[t']$. Ved hjelp av nødvendighetsregelen har man da at (2) $Nec(t=t' \rightarrow \beta;x[t] \leftrightarrow \beta;x[t'])$ er et teorem. Fra dette ser man lett at det følger:

(3) $Nec(t=t') \rightarrow Nec(\beta;x[t]) \leftrightarrow Nec(\beta;x[t'])$
$\rightarrow (Nec(\beta));x[t] \leftrightarrow (Nec(\beta))x;[t']$

I betraktning av identitetsaksiomene, TA6 og TA14 er det ikke spesielt vanskelig å innse at man har (4) $t=t' \rightarrow Nec(t=t')$ om t og t' enten er variabeltegn eller egenskapsabstrakter. Fra (3) og (4) følger $t=t' \rightarrow . (Nec(\beta));x[t] \leftrightarrow (Nec(\beta));x[t']$ Men ser at satsen holder for $Nec(\beta)$ om den holder for β.

(vii) $\alpha=Pos(\beta)$. Siden satsen etter induksjonshypotesen skal holde for β har vi at følgende er et teorem: (1) $t=t' \rightarrow \beta;x[t] \leftrightarrow \beta;x[t']$. Ved hjelp av nødvendighetsregelen har man da at (2) $Nec(t=t' \rightarrow . \beta;x[t] \leftrightarrow \beta;x[t'])$ er et teorem. Fra dette ser man lett at det følger:

(3) $Nec(t=t') \rightarrow Nec(\beta;x[t] \leftrightarrow \beta;x[t'])$
$\rightarrow Pos(\beta;x[t]) \leftrightarrow Pos(\beta;x[t'])$
$\rightarrow (Pos(\beta));[t] \leftrightarrow (Pos(\beta));[t']$

I betraktning av identitetsaksiomene, TA6 og TA14 er det ikke spesielt vanskelig å innse at man har (4) $t=t' \rightarrow Nec(t=t')$ om t og t' enten er variabeltegn eller egenskapsabstrakter. Fra (3) og (4) følger $t=t' \rightarrow . (Pos(\beta));[t] \leftrightarrow (Pos(\beta));[t']$ Men ser at satsen holder for $Pos(\beta)$ om den holder for β.

(viii) Vi har så langt bare vist at substitusjonsprinsippet holder om α er en formel i L;a som ikke inneholder egenskapsabstrakter. Er t et egenskapsabstrakt er det følgende muligheter for hvor det kan forekomme: Det kan enten forekomme umiddelbart etter predikatet At, det kan forekomme på høyre eller venstre side av identitetstegnet, og det kan endelig forekomme på høyre eller venstre side av ε. Kort sagt er muligheten at α kan være en formel av det slag som befinner seg til høyre i ekvivalensene i Lemma 6.1. Vi kan med andre ord ha at
α er av formen $At(\lambda z(\beta))$, $\lambda z(\beta) = \lambda w(\delta)$, $y= \lambda z(\beta)$, $\lambda z(\beta) =y$, $\lambda z(\beta)$ ê$\lambda w(\delta)$, yê$\lambda z(\beta)$ eller $\lambda z(\beta)$ êy.

Vi skal ikke undersøke alle tilfellene her vi undersøker bare et tilfelle der $\alpha= \lambda z(\beta)$ ê$\lambda w(\delta)$. Da har vi:

(1) $\alpha;x[t] = (\lambda z(\beta)$ ê$\lambda w(\delta));x[t] = \lambda z(\beta;x[t])$ ê$\lambda w(\delta;x[t])$

(2) $\alpha;x[t'] = (\lambda z(\beta)$ ê$\lambda w(\delta));x[t'] = \lambda z(\beta;x[t'])$ ê$\lambda w(\delta;x[t'])$

Nå har vi ifølge induksjonshypotesen at følgende er teoremer

(3) $t=t' \rightarrow \beta;x[t] \leftrightarrow \beta;x[t']$

(4) $t=t' \rightarrow \delta;x[t] \leftrightarrow \delta;x[t']$

Siden (3) og (4) er teoremer har har vi ved hjelp av nødvendighetsregelen at

(5) $Nec(t=t' \rightarrow \beta;x[t] \leftrightarrow \beta;x[t'])$

(6) $Nec(t=t' \rightarrow \delta;x[t] \leftrightarrow \delta;x[t'])$

Siden $t=t' \rightarrow Nec(t=t')$ følger:

(7) $t=t' \rightarrow Nec(\beta;x[t] \leftrightarrow \beta;x[t'])$

(8) $t=t' \rightarrow Nec(\delta;x[t] \leftrightarrow \delta;x[t'])$

Fra (1) og (2) har vi ved hjelp av Lemma 6.1 punkt (e):

(9) $\lambda z(\beta;x[t])$ ê$\lambda w(\delta;x[t]) \leftrightarrow$
$(Ez')(Ew')(z'\varepsilon w' \,\&\, Nec((Az)(z\varepsilon z' \leftrightarrow \delta;x[t])) \,\&\, Nec((Aw)(w\varepsilon w' \leftrightarrow \beta;x[t]))$

© 2012 Morten Harboe Rognes

(10) $\lambda z(\beta;x[t']) \hat{\epsilon}\lambda w(\delta;x[t']) \leftrightarrow$
$(Ez')(Ew')(z'\epsilon w' \& Nec((Az)(z\epsilon z' \leftrightarrow \delta;x[t'])) \& Nec((Aw)(w\epsilon w' \leftrightarrow \beta;x[t']))$

Fra (1),(2) og (7) - (10) følger så :

$t= t' \rightarrow \alpha;x[t] \leftrightarrow \alpha;x[t']$. De andre tilfellene vises på en lignende måte. Vi skulle dermed ha gitt et fullstendig bevis for punkt (c).

Ad (d): Vi bruker i det følgende "a" som forkortelse for "{z:α}" og "b" som forkortelse for "{z:β}". Det vis skal vise kan da formuleres slik:

(+) $(Ey)(y=a) \& Nec(a=b). \rightarrow \delta;x[a] = \delta;x[b]$

Dette gjøres ved induksjon på lengden av δ. Vi viser altså at (+) er et teorem dersom den er et teorem for alle formler som er kortere enn δ.

(i) δ er en atomær formel. Anta (1) $(Ey)(y=\{z:\alpha\}) \& Nec(\{z:\alpha\}=\{z:\beta\})$. Den første konjunkten her er i lys av Definisjon 4.1.1 ekvivalent med

$(Ex)(At(x) \& x=y \& x=\lambda z(\alpha))$ I lys av TA7 er dette i sin tur ekvivalent med (2) $(Ey)(y=\lambda z(\alpha))$. Den andre konjunkten i (1) er, igjen i lys av Definisjon 4.1.1, ekvivalent med (3) $Nec((Az)(\alpha\leftrightarrow\beta))$. Fra (2) har vi ved hjelp av TA7 og TA15 at det finnes y slik at

(4) $Nec((Az)(z\epsilon y \leftrightarrow \alpha))$. Dette og (3) gir en (5) $Nec((Az)(z\epsilon y \leftrightarrow \beta))$

Ved hjelp av TA7, TA15 og I1 kan man så fra (4) og (5) slutte (6) $\lambda z(\alpha) = \lambda z(\beta)$.

Siden δ er en atomær formel er den av typen At(x), x=y, y=x, xεy eller yεx. Strengt tatt må man vise at satsen holder i alle disse fem tilfellene.

Tilfelle 1: $\delta = (At(x))$. Da har vi at $\delta;x[a] = At(\{z:\alpha\})$ og $\delta;x[b] = At(\{z:\beta\})$

Nå har man ved hjelp av Definisjon 4.1.1 at $At(\{z:\alpha\}) = At(\lambda z(\alpha)) \& At(\{z:\beta\}) = At(\lambda z(\beta))$

Fra dette, (6) og identitetsaksiomene kan man slutte at $\delta;x[a] \leftrightarrow \delta;x[a]$

Tilfelle 2: δ er en formel av typen x=y. Da har man at

$\delta;x[a] \leftrightarrow \{z:\alpha\} = y$ og at $\delta;x[b] \leftrightarrow \{z:\beta\} = y$

Nå har man ved ved hjelp av Definisjon 4.1.1 og TA7 at $\{z:\alpha\} = y$ og $\{z:\beta\} = y$ er ekvivalente med henholdsvis $\lambda z(\alpha)=y$ og $\lambda z(\beta)=y$. Det følger at

$\delta;x[a] \leftrightarrow \lambda z(\alpha) =y$ og $\delta;x[b] \leftrightarrow \lambda z(\beta) =y$. Fra dette og (6) følger $\delta;x[a] \leftrightarrow \delta;x[b]$

Tilfelle 3: δ er (y=x). Dette tilfellet behandles på nøyaktig samme måte som foregående tilfelle.

Tilfelle 4: δ er (xεy). Da har vi ved hjelp av Definisjon 4.1.1

$\delta;x[a] \leftrightarrow \{z:\alpha\}\epsilon y \leftrightarrow (Ew)(w\epsilon y \& w= \lambda z(\alpha))$

$\delta;x[b] \leftrightarrow \{z:\beta\}\epsilon y \leftrightarrow (Ew)(w\epsilon y \& w= \lambda z(\beta))$

Fra dette og (6) kan man slutte: $\delta;x[a] \leftrightarrow \delta;x[b]$

Tilfelle 5: $\delta = (y\epsilon x)$ Da har man ved hjelp av Definisjon 4.1.1:

(7) $\delta;x[a] \leftrightarrow y\epsilon\{z:\alpha\} \leftrightarrow \alpha;z[y]$

(8) $\delta;x[b] \leftrightarrow y\epsilon\{z:\beta\} \leftrightarrow \beta;z[y]$

Fra den andre konjunkten i (1) og Definisjon 4.1.1 følger $(Az)(\alpha\leftrightarrow\beta)$ Fra dette, (7) og (8) følger så $\delta;x[a] \leftrightarrow \delta;x[b]$.

(ii) Induksjonstrinnene for de setningslogiske konnektivene og kvantorene kan bevises på samme måte som under punkt (c), (ii) - (v)

(iii) Induksjonstrinnet for Nec. Anta vi har at

$(Ey)(y=a) \& Nec(a=b) \rightarrow \delta;x[a] = \delta;x[b]$

er et teorem. Da har vi at $Nec((Ey)(y=a) \& Nec(a=b) \rightarrow \delta;x[a] \leftrightarrow \delta;x[b])$ er et teorem og derfor at $Nec((Ey)(y=a) \& Nec(a=b)) \rightarrow Nec(\delta;x[a]) \leftrightarrow Nec(\delta;x[b])$ er det. Dette siste er ekvivalent med: (1) $Nec((Ey)(y=a) \& Nec(a=b)) \rightarrow (Nec(\delta));x[a] \leftrightarrow (Nec(\delta));x[b]$ som derfor også er et teorem. Nå kan man vise at

© 2012 Morten Harboe Rognes

(2) (Ey)(y=a) & Nec(a=b). → Nec((Ey)(y=a) & Nec(a=b))

Fra dette og (1) kan man slutte:

(Ey)(y=a) & Nec(a=b) → (Nec(δ));x[a] ↔ (Nec(δ));x[b]

som viser at satsen holder for Nec(δ) om den holder for δ. Det gjenstår imidlertid å vise at (2) holder. Vi har ved hjelp av TA14 og det faktum at Nec(λ) → Nec((Ey)λ) at:

(3) (Ey)(y=a) ↔ (Ey)(y= {z:α}) ↔ (Ey)(y=λz(α)) → Nec((Ey)(y=λz(α))).

Videre har vi Nec(a=b) → Nec(Nec(α=b)) i kraft av TA2. Fra dette og (3) følger:

(Ey)(y=a) & Nec(a=b). → Nec((Ey)(y=a)) & Nec(Nec(a=b))
→ Nec((Ey)(y=a) & Nec(a=b))

(iv) Induksjonstrinnet for Pos. Argumentet blir stort sett som under punkt (iii). Vi har at (1) under foregående punkt, siden Nec(p↔q) → Pos(p) ↔Pos(q) er et modallogisk teorem, impliserer at følgende er et teorem

(+) Nec((Ey)(y=a) & Nec(a=b)) → (Pos(δ));x[a] ↔ (Pos(δ));x[b]

Fra dette, og det at (Ey)(y=a) & Nec(a=b) impliserer antesedenten i (+), følger at satsen holder for Pos(δ) dersom den holder for δ

(v) Tilslutt er det mulig at δ kan være et utsagn av typen At(λz(β)), λz(β) = λw(δ), y= λz(β), λz(β) =y, λz(β) êλw(δ), yêλz(β) eller λz(β) êy. I disse tilfellene går vi frem på samme måte som under punkt (c), tilfelle (viii).

Dermed har vi gitt bevis for punkt (d).

Ad (e): Studerer man nærmere beviset for (d) ser man at det går igjennom om vi overalt ersatter mengdeabstraktet {z:β} med et varibeltegn, la oss si w. Vi har altså:

(1) (Ey)(y= {z:α)) & Nec({z:α}=w) → δ;x[{x:α}] ↔ δ;[w]

Nå har man (Ax)δ → δ;x[w]. Fra dette og (1) følger:

(2) (Ey)(y= {z:α)) & Nec({z:α}=w) →. (Ax)δ→δ;x[{x:α}]

Fra dette følger, i det vi forutsetter at w er en variabel som ikke forekommer i α eller δ at

(3) (Ey)(y ={z:α}) & (Ew)Nec({z:α}=w) → . (Ax)δ→δ;x[{x:α}]

Men man kan lett vise at (Ey)(y ={z:α}) → (Ew)Nec({z:α}=w). Det følger at (f) holder.

Ad (f): Dette bevises på samme måte som punkt (e), men man benytter seg nå av det at δ;x[w] → (Ex)δ i stedet for (Ax)δ → δ;x[w]

Ad (g): Vi må vise at Nec(a = b) & At(a) → At(b) om a,b er termer i vid forstand. Hvis a,b er enten variabeltegn eller egenskapsabstrakter følger dette ved hjelp av punkt (c) siden vi har at Nec(a=b) → (a=b). Er a,b enten variabeltegn eller mengdeabstrakter følger påstanden ved hjelp av punkt (d) siden At(a) impliserer at (Ey)(y=a). Har vi at a er et egenskapsabstrakt og b et mengdeabstrakt , for eksempel at a er λz(α) og b er {y:β} har har vi at Nec(a=b) & At(a) innebærer at Nec(λz(α) = {y:β}) & At(λz(α)). Dette innebærer at λz(α) = {y:β} & At(λz(α)) som i lys av Definisjon 4.1.1 impliserer at det finnes w slik at w=λz(α) & w= λy(β) & At(λz(α)). Fra dette og identitets aksiomene har vi At(λy(β)) og derfor ved hjelp av Definisjon 4.1.1 at At({y:β}). Et tilsvarende resonnement kan gjennomføres om a={y:β} og b= λz(α).

Ad (h): Man må vise at Nec(a = b) & Set(a) → Set(b) om a,b er termer i vid forstand. Hvis a,b er enten variabeltegn eller egenskapsabstrakter følger dette ved hjelp av punkt (c) siden vi har at Nec(a=b) → (a=b).

Er a,b enten variabeltegn eller mengdeabstrakter følger påstanden ved hjelp av punkt (d) siden Set(a) impliserer At(a) som impliserer at (Ey)(y=a).

© 2012 Morten Harboe Rognes

Har vi at a er et egenskapsabstrakt og b et mengdeabstrakt , for eksempel at a er $\lambda z(\alpha)$ og b er $\{y:\beta\}$ har har vi at Nec(a=b) innebærer at $Nec(\lambda z(\alpha) = \{y:\beta\})$ Dette innebærer at $\lambda z(\alpha) = \{y:\beta\}$ som i lys av Definisjon 4.1.1 impliserer at det finnes w slik at $w=\lambda z(\alpha)$ & $w= \lambda y(\beta)$. Fra $w=\lambda z(\alpha)$ kan vi da ved hjelp av punkt (c) slutte at

(1) $Set(\lambda z(\alpha)) \rightarrow Set(w)$. Videre kan vi fra $w=\lambda y(\beta)$ slutte ved hjelp av TA14 at $Nec(w= \lambda y(\beta))$. Ved hjelp av Definisjon 4.1.1 har vi da $w=\{y:\beta\}$ & $Nec(w=\{y:\beta\})$ Fra dette og det vi har vist under punkt (d) følger $Set(w) \rightarrow Set(\{y:\beta\})$. Dette og (1) impliserer

$Set(\lambda z(\alpha)) \rightarrow Set(\{y:\beta\})$ med andre ord $Set(a) \rightarrow Set(b)$.

Et tilsvarende resonnement kan gjennomføres om $a=\{y:\beta\}$ og $b= \lambda z(\alpha)$.

Ad (i): Anta (1) $(Ax)(Nec(\alpha) \vee Nec(\neg\alpha)) \& At(\lambda x(\alpha))$. Fra den første konjunkten har vi: (2) $(Ax)(\alpha \rightarrow Nec(\alpha)) \& (Ax)((\neg\alpha) \rightarrow Nec(\neg\alpha))$ ved hjelp av de modale aksiomene. Fra $At(\lambda x(\alpha))$ følger at det finnes y slik at $At(y) \& y=\lambda x(\alpha)$. Fra dette, TA7 og TA14 følger $Nec(At(y)) \& Nec(y=\lambda x(\alpha))$ og derfor $Nec(At(y) \& y=\lambda x(\alpha))$. Fra dette følger så ved hjelp av identitetsaksiomene: (2) $Nec(At(\lambda x(\alpha))$. Herav har vi ved hjelp av TA12:

(3) $Nec((Ay)(y\hat{e}\lambda x(\alpha) \leftrightarrow \alpha;x[y])$ Fra (2) følger:

(4) $(Ay)(\alpha;x[y] \rightarrow Nec(\alpha;x[y])) \& (Ay)(\neg\alpha;x[y] \rightarrow Nec(\neg\alpha;x[y]))$

Fra (3) og (4) følger:

(5) $(Ay)(y\hat{e}\lambda x(\alpha) \rightarrow Nec(y\hat{e}\lambda x(\alpha))) \& (Ay)(\neg y\hat{e}\lambda x(\alpha) \rightarrow Nec(\neg y\hat{e}\lambda x(\alpha)))$

Dette sammen med siste konjunkt i (1) og definisjonen av Set impliserer $Set(\lambda x(\alpha))$

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

De fleste av punktene i det følgende teorem trenger neppe noen vidløftige kommentarer. Vi noterer imidlertid at punkt (b) i satsen sier at man kan slutte $\alpha;x[t]$, der t er en term i vid betydning, fra $(Ax)\alpha$ såsant man har at At(t), dvs. dersom t er en egenskap. Punkt (c) følger umiddelbart fra (b) siden Set(t) åpenbart impliserer At(t) og derfor er en sterkere forutsetning enn A(t).

Teorem 6.3

(a) $At(x) \& At(x) \rightarrow Set(<x,y>)$

(b) $At(a) \& (Ax)\alpha \rightarrow \alpha;x[a]$ dersom a er en term i vid betydning

(c) $Set(a) \& (Ax)\alpha \rightarrow \alpha;x[a]$ dersom a er en term i vid betydning

(d) $<x,y> = <z,w> \leftrightarrow x=z \& y=w$

(e) $At(x) \rightarrow At(UN(x))$

(f) $At(\{x:\alpha\}) \rightarrow \lambda x(\alpha) = \{x: \alpha\}$

(g) $At(x) \& At(y) \rightarrow At(xUy)$

(h) a Inkl b & $At(b) \rightarrow At(a)$

(i) $At(x) \& At(y) \rightarrow At(x\Omega y)$

Bevis: *Ad (a)*: Vi har ifølge Teorem 6.1:

(1) $(Ax)(At(x) \rightarrow Set(\{x\}))$ og

(2) $(Ax)(Ay)(At(x) \& At(y) \rightarrow Set(\{x,y\}))$.

Anta (3) $At(x) \& At(y)$. Ved hjelp av (1) har man da $Set(\{x\})$ og derfor (4) $At(\{x\})$. Videre har man fra (2) og (3) at $Set(\{x,y\})$ og derfor (5) $At(\{x,y\})$. Fra (4) og (5) følger (6) $(Ew)(w=\{x\}) \& (Ew)(w=\{x,y\})$. Fra den første konjunkten i (6), (2) og Teorem 6.2d, følger: $(Ay)(At(\{x\}) \& At(y) \rightarrow Set(\{\{x\},y\}))$. Fra dette, den andre konjunkten i (6) og Teorem 6.2d følger $At(\{x\}) \& At(\{x,y\}) \rightarrow Set(\{\{x\},\{x,y\}\})$. herav har vi så ved hjelp av (4) og (5) at $Set(\{\{x\},\{x,y\}\})$. Ved hjelp av Definisjon 6.2 følger fra dette $Set(<x,y>)$. Dette

© 2012 Morten Harboe Rognes

viser at (a) holder.

Ad (b): Er a et variabeltegn har vi åpenbart at (Ax)α → α;x[a] og derfor at påstanden holder.. Er a et egenskapsabstrakt følger fra At(a) at y=a for noe y. Da har vi (Ax)α → α;x[y]. Fra det at y=a følger ved hjelp av Teorem 6.2c at α;x[y] ↔ α;x[a]. Da har vi åpenbart (Ax)α → α;x[a]. Er a et mengdeabstrakt følger fra At(a) igjen at y=a for noe y. Da har vi ved ved hjelp av Teorem 6.2e at (Ax)α → α;x[a].

Ad (c): Dette følger direkte fra punkt (b) siden Set(a) impliserer At(a).

Ad (d): I lys av definisjonen av <x,y>, Definisjon 6.2d må vi vise at
(+) {{x},{x,y}} = {{z},{z,w}} ↔ x=z & y=w. Anta
(1) {{x},{x,y}} = {{z},{z,w}}
Siden man lett kan vise at {x}ε{{x},{x,y}} og {x,y}ε{{x},{x,y}} har man
(2.1) {x}ê{{z},{z,w}} & {x,y}ê{{z},{z,w}} På tilsvarende vis har man:
(2.2) {z}ε{{x},{x,y}} & {z,w}ê {{x},{x,y}}
Fra den første konjunkten i (2.1) har man:
(3) x=z v x=z=w. Fra den andre konjunkten i (2.1) har man på lignende måte
(4) x=y=z v {x,y}={z,w}
I lys av (3) og (4) skiller vi mellom fire tilfeller:
Tilfelle 1: (5) x=y & x=y=z. Fra den andre konjunkten i (2.2) har man
(6) {z,w}={x} v {z,w}={x,y}.
Undertilfelle 1.1: {z,w}={x}. Da følger z=w=x som sammen med (5) impliserer x=y=z=w. Dette impliserer åpenbart at x=z & y=w.
Undertilfelle 1.2: {z,w}={x,y}. Fra dette og (5) har man {z,w}={x} og derfor z=x=w. Sammen med (5) impliserer dette x=z &y=w
Tilfelle 2: (6) x=z & {x,y}={z,w}. Fra den første konjunkten i (2) har vi {z}={x} v {z}={x,y}. Vi sondrer i overenstemmelse med dette mellom to undertilfelle:
Undertilfelle 2.1: {z}={x}. Da har vi z=x. Fra (6) har man wε{z,w} og derfor wε{x,y}. Dette impliserer w=x v w=y. Har man w=x har vi w=z=x. Fra dette og (6) følger {x,y}={x} og derfor x=y. I så fall har vi w=z=x=y og derfor x=z & y=w.
Har man på den annen side w=y har vi ved hjelp av (6) at x=z & y=w.
Undertilfelle 2.2: {z}={x,y}. Da følger z=x=y. Fra dette og (6) følger videre at {z,w} = {y} og derfor at z=y=w. Vi har da x=z &y=w.
Tilfelle 3: x=z=w & x=y=z. Da følger umiddelbart at x=z og y=w
Tilfelle 4: x=z=w & {x,y}={z,w}. Da har vi {z,w} = {x} og følgelig {x,y}={x}. Herav følger x=y=z og derfor x=z & y=w.
Man ser at vi har x=z & y=w i alle tilfelle. Dette viser at kondisjonalen mot venstre i punkt (d) holder. Kondisjonalen mot venstre følger ved hjelp av Teorem 4.1.

Ad (e): Anta (1) At(x). Da har vi ved hjelp av aksiom TA22 at
(2) At(λx((Ew)(xεw & wεz))). Ved hjelp av Definisjon 4.1.1, klausul (i) er (2) ekvivalent med (3) At({x: (Ew)(xεw & wεz)}). Fra dette Definisjon 6.2g følger At(UN(x)). Dette viser at punkt (e) holder.

Ad (f): Anta (1) At({x:α}). Da har vi ved hjelp av Definisjon 4.1.1 at (2) At(λx(α)). Dette impliserer ved hjelp av TA17 at y= λx(α) for noe y . Fra dette og (2) har vi:
(3) At(y) & y=λx(α). Vi skal vise λx(α) ={x:α}. Ifølge Definisjon 4.1.1 forkorter

© 2012 Morten Harboe Rognes

dette (Ey)(At(y) & y=λx(α) & y= λx(α)). Men dette følger umiddelbart fra (3).

Ad (g): Nå har man ifølge punkt (e) at (1) (Ax)(At(x) → At(UN(x)). Anta (2) At(x) & At(y). Da har man ved hjelp av Teorem 6.1c at (3) At({x,y}). Det følger at det finnes w slik at w= {x,y}. Fra dette, (1),(3) og Teorem 6.2 følger (4) At(UN({x,y})). Nå har man zêUN({x,y}) ↔ (Ew)(zεw & wε {x,y}) ↔ (Ew)(zεw & (w=x v w=y)) ↔ zεx v zεy Videre har man zεx vzεy ↔ zêxUy. Det følger at (Az)(zêUN({x,y}) ↔ zêxUy). Fra dette følger UN({x,y}) =xUy. Siden dette er et teorem har vi også Nec(UN({x,y}) =xUy). Fra dette og (4) kan man slutte At(xUy) ved hjelp av Teorem 6.2g. Dette viser at (g) holder.

Ad (h): Vi skal vise at b Inkl a & At(a) → At(b) holder om a,b er mengdeabstrakter. Anta at (1) b Inkl a & At(a). Vi kan anta at a er {x:α} og b er {x:β}. Da har vi at a Inkl b, ifølge definisjonen av Inkl innbærer at Nec((Ax)(xêb → xêa)). Dette i sin tur impliserer (2) Nec((Ax)(β→α)). Siden At(a) har vi at At({x:α}). Dette impliserer ved hjelp av Definisjon 4.1.1 At(λx(α)). Herav kan man slutte at det finnes y slik at (3) At(y) & y=λx(α). Fra (3) og TA18, utsondringsaksiomet, har man (4) At((λx)(xεy & β)). Fra (3) følger ved hjelp av TA15 at Nec((Ax)(xεy ↔ α)). Herav følger ved hjelp av (2) at (5) Nec((Ax)(xεy & β ↔ β)). Nå har man fra (4) at det finnes w slik at

(6) w=λx(xεy &β) & At(w). Fra dette følger ved hjelp av TA15:

(7) Nec((Ax)(xêw ↔ xêy & β)). Fra (5) og (7) har man: Nec((Ax)(xêw↔β)). Fra dette og den andre konjunkten i (6) og TA15 følger w=λx(β). Det følger siden At(w) at At(λx(β)). Fra dette har man ved Definisjon 4.1.1 at At({x:β}), med andre ord At(b). Dette viser at (h) holder.

Ad (i): Anta (1) At(x) & At(y). Ved hjelp av utsondringsaksiomet har man at da at (2) At(λz(zêx &zêy)). Ved hjelp av Definisjon 4.1.1 sier dette det samme som (3) At({z: zêx & zêy}). I lys av definisjon 6.2 er dette ekvivalent med: At(xΩy).

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Definisjon 6.3	(a)	V;a = {x: At(x)}
	(b)	V;m = {x: Set(x)}
	(c)	Pt(b) = {x: x Inkl b } Ω V;a
	(d)	Pt;m(b)= {x: x Inkl b } Ω V;m
	(e)	Set;f(x) ↔ Set(x) & (Ay)(yεx → Set(y))

Fra definisjonen ovenfor fremgår det at V;a er mengden av alle egenskaper og at V;m er mengden av alle mengder. Det er ganske lett å vise at disse to størrelsene ikke eksisterer i det rene kumulative egenskapshierarki. Pt(b) er potensmengden tilb, ie. mengden av alle de egenskaper som er inkludert i b. Pt;m(b) er mengden av alle de mengder som er inkludert i b. Man bør skille mellom Pt(b) og Pt;m(b). Er foreksempel b en egenskap hvor ekstensjonen varierer fra verden til verden vil det ikke finnes noen egenskap med konstant ekstensjon, ie. en mengde, som er inkludert i b. I så fall vil Pt;m(b) være tom. Derimot kan det i et slikt tilfelle finnes uendelig mange egenskaper som er inkludert i b. Pt(b) behøver derfor ikke å være tom.

Set;f(x) betyr at x er en mengdefamilie. Dette innebærer at x er en mengde og at alle elementene i x også er mengder.

© 2012 Morten Harboe Rognes

Det følgende teorem viser at Pt(x) og Pt;m(x) er egenskaper om x er det og at de er mengder under den samme forutsetning. Teoremet sier videre at xΩy og xUy er mengder om x og y er mengder. Endelig sier satsen at UN(x) er en mengde om x er en mengdefamilie.

Teorem 6.4

(a) At(x) →. At(Pt(x)) & At(Pt;m(x))
(b) At(x) →. Set(Pt(x)) & Set(Pt;m(x))
(c) Set(x) & Set(y) →. Set(xUy) & Set(xΩy)
(d) Set;f(x) → Set(UN(x))

Bevis: *Ad (a)*: Anta (1) At(x). Vi har ved hjelp av Definisjon 4.1.1 at

(2) At(Pt(x)) ↔ At({y: y Inkl x & At(y)})
↔ At((λy)(y Inkl x & At(y)))
↔ At((λy)(At(y) & Nec((Az)(zêy → zêx))))

Fra (1) følger da, ved hjelp av TA21, at (3) At(Pt(x)). Nå har vi at Pt;m(x) Inkl Pt(x) Fra dette, (3) og Teorem 6.3h følger så At(Pt;m(x)). Dette viser at (a) holder.

Ad (b): Vi antar at (1) At (x) La oss sette per definisjon:

(2) β0(y) ↔ At(y) & Nec((Az)(zêy → zêx))
(3) β1(y) ↔ Set(y) & Nec((Az)(zêy → zêx))

(i) Vi viser først at Set(Pt(x)). For å vise at Set(Pt(x)) må vil det være nok å vise

(4.1) At(Pt(x))
(4.2) (Ay)(β0(y) → Nec(β0(y)))
(4.3) (Ay)(¬(β0(y)) → Nec(¬(β0(y))))

Nå har man at (4.1) følger fra (1) og det vi viste under punkt (a). (4.2) følger lett ved hjelp av TA7 og TA2. La oss bevise (4.3): Anta (5) ¬β0(y). Da har vi i lys av (2) at
(6) ¬(At(y)) v ¬ Nec((Az)(zêy → zêx)). Har vi ¬At(y) følger ved hjelp av TA9 at Nec(¬At(y)) og derfor Nec(¬(At(y) & Nec((Az)(zêy → zêx)))) ie, Nec(¬(β0(y)). Har vi på den annen side ¬Nec((Az)(zêy → zêx)) følger, siden ¬Nec(p) → Nec(¬Nec(p)), at Nec(¬Nec((Az)(zêy → zêx)) og derfor Nec(¬(At(y) & Nec((Az)(zêy → zêx))), med andre ord Nec(¬(β0(y)). Man ser at i begge tilfelle har man Nec(¬β0(y)). Dette viser at (4.3) holder.

(ii) Vi skal nå vise at man også har Set(Pt;m(x)). Det vil da være tilstrekkelig å vise:

(6.1) At(Pt;m(x))
(6.2) (Ay)(β1(y) → Nec(β1(y)))
(6.3) (Ay)(¬β1(y) → Nec(¬β1(y)))

Nå følger (6.1) direkte fra det vi viste under punkt (a). For å vise at (6.2) holder er det først hensiktsmessig å vise at (7) Set(y) → Nec(Set(y)). For å vise dette er det tilstrekkelig, i lys av definisjonen av Set(y), å vise

(8) [At(y) & (Az)(zεy → Nec(zεy)) & (Az)(¬(zεy) → Nec(¬(zεy)))] →
Nec(At(y)) & Nec((Az)(zεy → Nec(zεy)))& Nec((Az)(¬(zεy) → Nec(¬(zεy))))

Siden At(y) → Nec(At(y)) følger direkte fra TA7 ser man antesedenten i (8) impliserer den første konjunkten i konsekventen. La oss først vise at

(9) (Az)(zεy → Nec(zεy)) & (Az)(¬(zεy) → Nec(¬(zεy))) →
Nec((Az)(zεy → Nec(zεy)))

Vi har (10) ¬ Nec((Az)(zεy → Nec(zεy))) → Pos((Ez)(zεy & ¬Nec(zεy)))
→ Pos((Ez)(zεy & Pos(¬(zεy))))

© 2012 Morten Harboe Rognes

→ (Ez)(Pos(zεy & Pos(¬(zεy))))
→ (Ez)(Pos(zεy) & Pos(Pos(¬(zεy))))
→ (Ez)(Pos(zεy) & Pos(¬(zεy)))
→ (Ez)(¬Nec(¬(zεy)) & ¬Nec(zεy))
→ ¬(Az)(Nec(zey) v Nec(¬(zεy)))

Fra dette har man

(11) ¬ Nec((Az)(zεy → Nec(zεy))) → ¬(Az)(Nec(zey) v Nec(¬(zεy)))

og derfor:

(12) (Az)(Nec(zey) v Nec(¬(zεy))) → Nec((Az)(zεy → Nec(zεy)))

Nå har man, noe man lett kan overbevise seg selv om at

(p→Nec(p) & ¬p → Nec(¬p))↔ (Nec(p) v Nec(¬p))

Benytter man seg av dette kan man fra (12) slutte at (9) holder.

La oss så vise

(13) (Az)(zεy → Nec(zεy)) & (Az)(¬(zεy) → Nec(¬(zεy))) →
Nec((Az)(¬(zεy) → Nec(¬(zεy))))

Man har:

(14) ¬Nec((Az)(¬(zεy) → Nec(¬(zεy)))) → Pos((Ez)(¬(zεx) &Pos(zεx))
→ (Ez)(Pos(¬(zεx) & Pos(zεx)))
→ (Ez)(Pos(¬(zεx)) & Pos(Pos(zêx)))
→ (Ez)(Pos(¬(zεx)) & Pos(zεx))
→ ¬(Ax)(Nec(zεx) v Nec(¬(zεx)))

Herav:

(15) (Ax)(Nec(zεx) v Nec(¬(zεx))) →Nec((Az)(¬(zεy) → Nec(¬(zεy))))

Fra (15) følger så (13). Fra det at At(y) → Nec(At(y)), (9) og (15) følger at (8) holder og derfor at (7) holder.

La oss nå vise at (6.2) holder. Anta (16) β1(y). Vi har da per definisjon av β1 at Set(y) & Nec((Az)(zêy → zêx)). Fra Set(y) følger ved hjelp av (7) at (17) Nec(Set(y)) Fra Nec((Az)(zêy → zêx)) følger ved hjelp av TA2 at Nec(Nec((Az)(zêy → zêx))). Fra dette og (17) følger så Nec(β1(y)). Dette viser at (6.2) holder.

La oss så vise at (6.3) holder. Fra (10) og (14) har vi at følgende er et teorem

(18) (Az)(Nec(zεy) v Nec(¬zεy)) ↔
Nec((Az)(zεy →Nec(zεy))) & Nec((Az)(¬zεy →Nec(¬zεy)))

Vi ønsker å vise at (19) ¬Set(y) → Nec(¬Set(y)). Anta derfor (20) Pos(Set(y)). Da har man (21) Pos(At(y) & (Az)(Nec(zεy) v Nec(¬zεy))). Fra dette følger så

(22) Pos(At(y)). Siden vi i lys av aksiom TA7 har Nec(At(y) → Nec(At(y))) følger fra (22) at Pos(Nec(At(y)) og herav (23) At(y) . Fra (21) følger også

(24) Pos((Az)(Nec(zεy) v Nec(¬zεy))). Fra dette og (18) har man

(25.1) Pos(Nec((Az)(zεy →Nec(zεy))))

(25.2) Pos(Nec((Az)(¬zεy →Nec(¬zεy))))

herav følger så ved hjelp av TA2 & TA3:

(26) (Az)(zεy → Nec(zεy)) & (Az)(¬zεy → Nec(¬(zεy)))

Fra dette og (23) kan man slutte Set(y). Vi har altså som et teorem at Pos(Set(y)) → Set (y) . Det følger at (27) Set(y) → Nec(¬Set(y)).

Anta ¬β1(y). Da følger ¬(Set(y)) v ¬Nec((Az)(zεy → zεx)). I det første tilfellet har vi Nec(¬Set(y)) og derfor Nec(¬β1(y)). I det andre tilfellet har vi

Nec(¬Nec((Az)(zεy → zεx))) og derfor Nec(¬β1(y)). I begge tilfelle har vi at Nec(¬β1(y)). Det følger at (6.3) holder.

Dermed har vi fullført vårt bevis for punkt (b).

© 2012 Morten Harboe Rognes

Ad (c): Vi har fra Teorem 6.3 at (1) At(x) & At(y) → At(xUy). Vi skal vise at (2) Set(x) & Set(y) → Set(xUy). Anta (3) Set(x) & Set(y). For å vise at Set(xUy) vil det være tilstrekkelig å vise følgende:

(4.1) At(xUy)
(4.2) (Az)(zεx v zεy → Nec(zεxv zεy))
(4.3) (Az)(¬(zêx)& ¬(zêy). → Nec(¬(zêx)& ¬(zêy))).

La oss først ta for oss (3.1): Fra (3) følger At(x) & At(y) som sammen med (1) impliserer (4.1). La oss så vise (4.2): Anta zεx v zεy. Har man at zêx følger fra det at Set(x) at Nec(zεx). Da har man selvfølgelig at Nec(zεxv zεy). På tilsvarende vis resonnerer man i tilfelle zεy. Dette viser at (4.2) holder. Når det gjelder (4.3) følger dette fra Set(x) & Set(y). Disse to impliserer (Az)(¬zεx)→Nec(¬zεx)) & (Az)(¬(zεy)→ Nec(¬(zεy)). Dette impliserer (4.3)

Fra Teorem 6.3 har man også at (5)At(x) & At(y) → At(xΩy). Vi må vise: (6) Set(x) & Set(y) → Set(xΩy). Anta (7) Set(x) & Set(y). Det vil være tilstrekkelig å vise:

(8.1) At(xΩy)
(8.2) (Az)(zεx & zεy → Nec(zεx & zεy))
(8.3) (Az)(¬(zêx)v ¬(zêy). → Nec(¬(zêx)v ¬(zêy)))

(8.1) følger fra (7) og (5). (8.2) og (8.3) følger lett ved hjelp av (7). Dette viser at (c) holder.

Ad (d): Anta (1) Set;f(x). Siden Set;f(x) impliserer Set(x) som impliserer At(x), har vi fra Teorem 6.3 at (2) At(UN(x)). Det vil derfor være tilstrekkelig å vise at

(3.1) (Ey)(zεy & yεx) → Nec((Ey)(zεy & yεx))
(3.2) ¬(Ey)(zεy & yεx) → Nec(¬(Ey)(zεy & yεx))

Vi tar først for oss (3.1) anta (4) zεy&yεx for noe y. Siden Set;f(x) har vi da Set(y) og Set(x). Fra dette og (4) følger Nec(zεy) & Nec(yεx). Herav Nec((Ey)(zεy&yεx)). Dette viser at (3.1) holder.

La oss så vise (3.2). Det vil være tilstrekkelig å vise (4) Pos((Ey)(zεy &yεx)) → (Ey)(zεy & yεx). Anta derfor (5) Pos((Ey)(zεy &yεx)). Det følger da ta (Ey)(Pos(zεy &yεx)). Det finnes altså y slik at (6) Pos(zεy &yεx). Siden Set;f(x) har vi (7) Set(x). Nå viste vi ovenfor , i forbindelse med punkt (b), at (+) (Az)(Set(x) → Nec(Set(x))). Fra dette og (7) følger (8) Nec(Set(x)). Siden vi ved hjelp av definisjonen av Set(x) har at Nec(Set(x) → (Ay)(yεx → Nec(yεx))) følger ved hjelp av (8) at (9) Nec((Ay)(yεx → Nec(yεx))). Fra (6) følger (10) Pos(zεy) & Pos(yεx). Fra den siste konjunkten i (10) og (9) kan man slutte Pos(Nec(yεx)). Herav følger ved hjelp av TA2 og TA3 at (11) yεx. Siden Set;f(x) og yêx har vi Set(y). Ved hjelp av (+) har vi herav Nec(Set(y)) og derfor (12) Nec((Az)(zεy → Nec(zεy))). Fra dette og den første konjunkten i (10) følger følger Pos(Nec(zεy)) og derfor zey. Dette sammen med (11) impliserer (Ey)(zεy & yεx). Dette viser at (4) holder og avslutter vårt bevis for punkt (d). **QED**.

Den følgende definisjon introduserer kryssproduktet til to egenskaper a og b, videre hva som menes med den konverse relasjon til a, a;-1. Videre fastsetter definisjonen hva som menes med at a er en relasjon, hva som menes med at a er entydig og en-entydig. Endelig defineres hva som menes med at a er en funksjon og hva som menes med at a er en en-entydig funksjon.

Definisjon 6.4

(a) axb = {z: (Ex)(Ey)(xεa & yεb & z=<x,y>}
(b) a^2 = axa

© 2012 Morten Harboe Rognes

(c) a;-1 = {<x,y>: <y,x>εa}
(d) Rel(a) ↔ a Inkl (V;a)^2
(e) Un(a) ↔ (Ax)(Ay)(Az)(<x,y>,<x,z>εa → y=z)
(f) Un;2(a) ↔. Un(a) & Un(a;-1)
(g) Fnc(a) ↔ Rel(a) & Un(a)
(h) Fnc;2(a) ↔ Rel(a) & Un;2(a)

Den følgende sats sier at axb er en mengde om a og b er mengder. Videre sier den at axb er en egenskap om a og b er egenskaper.

Teorem 6.5
(a) Set(a) & Set(b) → Set(axb)
(b) At(a) & At(b) → At(axb)

Bevis: *Ad (a)*: Anta (1) Set(a) & Set(b). Nå har ved hjelp av definisjonen av axb:
(2) xεaxb ↔ (Ey)(Ez)(yεa & zεb & x= <y,z>)
↔ (Ey)(Ez)({y} Inkl aUb & {y,z} Inkl aUb & x= <y,z>)
↔ (Ey)(Ez)({y}εPt(aUb) & {y,z}ε Pt(aUb) & x=<y,z>)
↔ (Ey)(Ez)(x=<y,z> & <y,z>εPt(Pt(aUb))
↔ xεPt(Pt(aUb))
Vi har altså som et teorem:
(3) Set(a) & Set(b) → (Ax)(xεaxb → xεPt(Pt(axb)). Derfor:
(4) Nec(Set(a) & Set(b) → (Ax)(xεaxb → xεPt(Pt(axb))))
Siden vi tidligere har vist at Set(a) → Nec(Set(a)) & Set(b) → Nec(Set(b)) følger ved hjelp av dette og (4) at: Nec((Ax)(xεaxb → xεPt(Pt(aUb)))). Her av følger så ved hjelp av definisjonen av Inkl:
(5) axb Inkl Pt(Pt(aUb))
Siden Set(a) og Set(b) har vi ifølge forrige teorem at Set(aUb) og derfor At(aUb). Ved hjelp av Teorem 6.4 følger da Set(Pt(aUb)) og derfor (6) Set(Pt(Pt(aUb)). Fra dette og (5) følger ved hjelp av Teorem 6.3 at (7) At(axb). Siden vi ønsker å vise Set(axb) er det nødvendig å vise at følgende holder:
(8.1) (Az)(zε(axb) → Nec(xε(axb)))
(8.2) (Az)(¬(zε(axb)) → Nec(¬(zε(axb))))
vil også være tilstrekkelig. La oss først gi et bevis for (8.1):
Anta (9) zεaxb for vilkårlig z. Per definisjon kan man da slutte at det finnes v,w slik at (10) vεa & wεb & z=<v,w>. Siden Set(a) & Set(b) følger fra (10):
(11) Nec(vεa) & Nec(wεb). Videre følger fra den siste konjunkten i (10) at (12) Nec(z= <v,w>). Fra (11) og (12) følger
Nec((Ev)(Ew)(z= <v,w> & vεa & wεb)). Herav har man ved hjelp av definisjonen av axb at Nec(zε(axb)). Dette viser at (8.1) holder.
La oss så vise (8.2). Anta (13) Pos(zε(axb)), med andre ord at
Pos((Ev)(Ew)(z = <v,w> & vεa & wεb)). Fra dette følger (14) Pos(z = <v,w> & vεa & wεb) for noe v,w. Siden Set(a) & Set(b) følger, som vi tidligere har vist Nec(Set(a)) & Nec(Set(b)). Da har vi
(15.1) Nec((Az)(zεa → Nec(zεa))
(15.2) Nec((Az)(zεa→ Nec(zεb)) Videre har vi ved hjelp av Definisjon 4.1.1 og TA14 at: (16) Nec(z=<v,w> → Nec(z=<v,w>)). Fra dette, (14), (15.1) og (15.2) følger: Pos(Nec(vεa)) & Pos(Nec(wεb)) & Pos(Nec(z=<v,w>)). Siden vi generelt har

© 2012 Morten Harboe Rognes

Pos(Nec(α)) → α, dette følger ved hjelp av TA2 og TA3, har man z = <v,w> & vεa & wεb og derfor (Ev)(Ew)(z = <v,w> & vεa & wεb). Herav zê(axb). Dette viser at (8.2) holder. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for punkt (a).

Ad (b): Anta (1) At(r) & At(t). Fra dette og TA16 følger at det finnes z,w slik at
(2.1) Set(z) & (Av)(vεz ↔ vεr)
(2.2) Set(w) & (Av)(vεw ↔ vεt)
Fra (2.1) og (2.2) følger ved hjelp av det vi viste under punkt (a) at
(3) Set(zxw) & (Av)(vεzxw ↔ vε(rxt))
Herav følger at det finnes y slik at y=zxw og derfor: (4) (Ey)(Set(y) &(Av)(vεy ↔ vε(rxt)))
Vi har nå bevist at følgende er et teorem:
(4) (Ar)(At)(At(r) & At(t) → (Ey)(Set(y) &(Av)(vεy ↔ vε(rxt))))
Ved hjelp av nødvendighetsregelen følger herav
(5) Nec((Ar)(At)(At(r) & At(t) → (Ey)(Set(y) &(Av)(vεy ↔ vε(rxt)))))
Herav: (6) Nec(At(r)) & Nec(At(t))→ Nec((Ey)(Set(y) &(Av)(vεy ↔ vε(rxt))))
Siden vi har (Ax)(At(x)→Nec(At(x)) følger:
(7) At(r) & At(t) → Nec((Ey)(Set(y) &(Av)(vεy ↔ vε(rxt))))
Ved hjelp av TA26 har vi herav At(r) & At(t) →At(λv(vεrxt)). Herav
(Ar)(At)(At(r) & At(t) →At(λv(vεrxt)) og derfor:
(8) (Ar)(At)(At(r) & At(t) →At(rxt))
Anta At(a) & At(b). Da finnes x,y slik at x=a & y=b. Fra dette,(8) og Teorem 6.3 følger At(axb). Dette viser at punkt (b) holder. **QED**.

Den følgende definisjon er helt standardpreget:

Definisjon 6.5
(a) Dom(a) = {x: (Ey)(<x,y>εa)}
(b) Rgn(a) = {x: (Ey)(<y,x>εa)}
(c) Rest(a,b) = aΩ(bxV;a)
(d) a"b = Rgn(Rest(a,b))
(e) a○b = {<x,y>: (Ez)(<x,z>εa & <z,y>εb}

Er a en relasjon er Dom(a) domenet til a og Rgn(a) verdiområdet til relasjonen. Rest(a,b) betegner restriksjonen av a til b, med andre ord den relasjonen som frekommer når domenet til a begrenses til mengden b. a"b er bildet av mengden b over relasjonen a. Endelig er a○b sammensetningen av de to relasjonene a og b.

Teorem 6.6
(a) Nec(Un(a)) & a Inkl (V;a)^2 & At(b) → At(a"b)

Som man ser sier denne satsen at dersom det er logisk nødvendig at a er en entydig relasjon, og det som har egenskapen a utelukkende er par, så er bildet av b over a en egenskap om b er en egenskap.

Bevis: Man har
(1) [At(w) & (Ax)(Ay)(F(x,y) → At(x)& At(y)) &
(Ax)(Ay)(Az)(F(z,x) & F(z,y) → x=y)]→
(Ez)(At(z) & (Ax)(xεz ↔ (Ey)(yεw & F(y,x))))

© 2012 Morten Harboe Rognes

Dette er rett og slett TA25. Konsekventen i (1) impliserer ved hjelp av TA16

(2) $(Ev)(Set(v) \& (Ax)(x\varepsilon v \leftrightarrow (Ey)(y\varepsilon w \& F(y,x))))$ Vi har derfor:

(3) $[At(w) \& (Ax)(Ay)(F(x,y) \rightarrow At(x) \& At(y)) \& (Ax)(Ay)(Az)(F(z,x) \& F(z,y) \rightarrow x=y)] \rightarrow (Ev)(Set(v) \& (Ax)(x\varepsilon v \leftrightarrow (Ey)(y\varepsilon w \& F(y,x))))$

Siden (3) er et teorem i MZFC har vi om vi forkorter antesedenten i (3) med Ant(3) at

(4) $Nec(Ant(3)) \rightarrow Nec((Ev)(Set(v) \& (Ax)(x\varepsilon v \leftrightarrow (Ey)(y\varepsilon w \& F(y,x)))))$

Ved hjelp av (4) kan man slutte:

(5) $Nec(Un(a)) \& a\ Inkl\ (V;a)^2 \& At(a) \rightarrow At(\{x: (Ey)(y\varepsilon b \& \langle y,x\rangle \varepsilon a)\}$

Nå har vi:

(6) $(Ax)(x\varepsilon a''b \leftrightarrow x\varepsilon Rgn(Rest(a,b)) \leftrightarrow (Ey)(\langle y,x\rangle \varepsilon Rest(a,b)) \leftrightarrow (Ey)(\langle y,x\rangle \varepsilon\ a\Omega(bxV;a)) \leftrightarrow (Ey)(\langle y,x\rangle \varepsilon a \& y\varepsilon b) \leftrightarrow (Ey)(y\varepsilon b \& \langle y,x\rangle \varepsilon a))$

Siden (6) er et teorem i MZFC følger ved hjelp av nødvendighetsregelen at

(7) $Nec(a''b = \{x: (Ey)(y\varepsilon b \& \langle y,x\rangle \varepsilon a)\})$

Fra dette, (6) og Teorem 6.3 følger $Nec(Un(a)) \& a\ Inkl\ (V;a)^2 \& At(b) \rightarrow At(a''b)$.
QED.

Den følgende sats er et rent modallogisk teorem:

Teorem 6.7

(a) $(\alpha \rightarrow Nec(\alpha) \& (\neg\alpha) \rightarrow Nec(\neg\alpha)) \rightarrow Nec(\alpha \rightarrow Nec(\alpha)) \& Nec((\neg\alpha) \rightarrow Nec(\neg\alpha))$

Bevis: Vi har ved hjelp av de modallogiske aksiomene:

(1) $\neg Nec(\alpha \rightarrow Nec(\alpha)) \rightarrow Pos(\alpha \& \neg Nec(\alpha)) \rightarrow Pos(\alpha \& Pos(\neg\alpha)) \rightarrow Pos(\alpha) \& Pos(Pos(\neg\alpha)) \rightarrow Pos(\alpha) \& Pos(\neg\alpha) \rightarrow \neg(Nec(\alpha) \vee Nec(\neg\alpha))$

Dessuten har vi:

(2) $(\alpha \rightarrow Nec(\alpha)) \& (\neg\alpha \rightarrow Nec(\neg\alpha)) \rightarrow Nec(\alpha) \vee Nec(\neg\alpha)$

Fra (1) og (2) følger:

(3) $(\alpha \rightarrow Nec(\alpha)) \& (\neg\alpha \rightarrow Nec(\neg\alpha)) \rightarrow Nec(\alpha \rightarrow Nec(\alpha))$

Videre har man:

(4) $\neg Nec((\neg\alpha) \rightarrow Nec(\neg\alpha)) \rightarrow Pos(\neg\alpha \& \neg Nec(\neg\alpha)) \rightarrow Pos(\neg\alpha \& Pos(\alpha)) \rightarrow Pos(\neg\alpha) \& Pos(Pos(\alpha)) \rightarrow Pos(\neg\alpha) \& Pos(\alpha) \rightarrow \neg(Nec(\alpha) \vee Nec(\neg\alpha))$

Fra dette og (2) følger:

$(\alpha \rightarrow Nec(\alpha)) \& (\neg\alpha \rightarrow Nec(\neg\alpha)) \rightarrow Nec((\neg\alpha) \rightarrow Nec(\neg\alpha))$ som sammen med (3) impliserer det vi ønsker. **QED**.

Er a en term i vi forstand sier vi at a er bestemt eller har den samme ekstensjon i enhver verden hvis og bare hvis den oppfyller betingelsen

© 2012 Morten Harboe Rognes

(Ax)(xεa → Nec(xεa)) & (Ax)(¬(xεa) → Nec(¬xεa))
Vi bruker "Det(a)" som forkortelse for "a er bestemt" og gir den følgende definisjon:

Definisjon 6.6
(a) Det(a) ↔. (Ax)(xεa → Nec(xεa)) & (Ax)(¬(xεa) → Nec(¬xεa))
Ved hjelp av denne definisjonen kan man utlede:

Korollar 6.7.1 Det(a) → Nec(Det(a)). & (¬Det(a) → Nec(¬(Det(a)))

Bevis: Anta (1) Det(a) Da har man per definisjon:
(2) (Ax)(xεa → Nec(xεa)) & (Ax)(¬(xεa) → Nec(¬xεa)). Da har man
(3) (Ax)((xεa → Nec(xεa)) & (¬(xεa) → Nec(¬xεa))). La oss forkorte uttrykket etter allkvantoren i (3) med F(x,a). Man har da ved hjelp av TA4
(4) Nec((Ax)(F(x,a))) ↔ (Ax)Nec(F(x,a)). Ved hjelp av Teorem 6.7 følger at (5) F(x,a) → Nec(F(x,a)) er et teorem i MZFC. Fra dette følger
(6) (Ax)(F(x,a) → Nec(F(x,a)) ved hjelp av regelen om universell generalisering. Fra (6) og (3) følger (Ax)Nec(F(x,a)) og herav ved hjelp av (4) at Nec((Ax)F(x,a)). Dette i sin tur impliserer at Nec(Det(a)). Dette viser at den første halvdelen av teoremet holder.
La oss vise at ¬Det(a) → Nec(¬(Det(a)). Anta (7) Pos(Det(a)). Nå har vi allerede bevist: |- Det(a) → Nec(Det(a)). Det følger da ved hjelp av nødvendighetsregelen at (8) |- Nec(Det(a) → Nec(Det(a))). Fra dette og (8) har vi (9) Pos(Nec(Det(a)). Fra dette har man ved hjelp av TA2 at Nec(Det(a)) og derfor Det(a). Vi har altså bevist. Pos(Det(a)) → Det(a). Herav følger ¬Det(a) → Nec(¬(Det(a)). **QED**.

Teorem 6.8
(a) Det(a) & Un(a) → Nec(Un(a))
(b) Det(a) & Un(a) & a Inkl (V;a)^2 & Set(x) → Set(a"x)

Bevis: *Ad (a)*: Anta (1) ¬Nec(Un(a)). Fra dette følger ved hjelp av definisjonen av Un at Pos((Ex)(Ey)(Ez)(<x,y>εa & <x,z>εa & y≠z)). Da må det finnes x,y z slik at
(2) Pos(<x,y>εa & <x,z>εa & y≠z). Siden vi ifølge forutsetningene har Det(a) og dessuten at (Ax)(Ay)(Nec(x≠y → Nec(x≠y))) har man:
(3.1) Nec(<x,y>εa → Nec(<x,y>εa))
(3.2) Nec(<x,z>εa → Nec(<x,z>εa))
(3.3) Nec(y≠z → Nec(y≠z))
Fra (2) og (3.1) - (3.3) kan man slutte: Pos(Nec(<x,y>εa)) & Pos(Nec(<x,z>εa)) samt Pos(Nec(y≠z)). Men siden man lett utleder ved hjelp av de modallogiske aksiomene at Pos(Nec(α)) → α følger det at <x,y>εa & <x,z>εa & y≠z. Men dette strider mot forutsetningen om at Un(a). Dette viser at (a) holder.
Ad (b): Vi har i kraft av definisjonen av a"x at
(1) (Ax)(xεa"b ↔ xεRgn(Rest(a,b))
↔ (Ey)(<y,x>εRest(a,b))
↔ (Ey)(<y,x>ε aΩ(bxV;a))
↔ (Ey)(<y,x>εa & yεb)
↔ (Ey)(yεb & <y,x>εa))
Siden (1) er et teorem i MZFC har vi også:
(2) Nec((Ax)(xεa"b ↔ (Ey)(yεb & <y,x>εa)))
Anta forutsetningene i (b) holder. Da følger ved hjelp av Teorem 6.6 at At(a"x). Det er

© 2012 Morten Harboe Rognes

nødvendig å vise at Det(a"x). Vi viser først at (Ay)(yεa"x → Nec(yεa"x)). Anta derfor (3) yεa"x for vilkårlig y. Ved hjelp av (1) har vi da (Ez)(<z,y>εa & zεx). Da finnes z slik at (4) zεx & <z,y>εa. Siden det forutsettes at Det(a) & Set(x) følger herav:

Nec(zεx) & Nec(<z,y>εa). Da Nec((Ez)(<z,y>εa & zεx)). Dette impliserer ved hjelp av (2) at Nec(yεa"x). Siden y var vilkårlig har vi (Ay)(yεa"x → Nec(yεa"x)).

Vi må nå bevise: (+) (Ay)(¬(yεa"x) → Nec(¬(yεa"x)))

Det vil være tilstrekkelig å vise: Pos(yεa"x) → yεa"x. Anta derfor (5) Pos(yεa"x). Da har vi ved hjelp av (2) at Pos((Ez)(zεx & <z,y>εa)). Det følger at (6) Pos(zεx & <z,y>εa) for noe z. Siden det forutsettes at Set(x) og Det(a) har vi ved hjelp av Teorem 6.7 at

(7.1) Nec((Ax)(xεa → Nec(xεa)))

(7.2) Nec((Az)(zεx → Nec(zεx)))

Fra dette og (6) kan man slutte: (8) Pos(Nec(zεx)) & Pos(Nec(<z,y>εa))

Fra dette følger siden man generelt har Pos(Nec(α)→ α at følgende holder zεx & <z,y>εa. Herav: (Ez)(zεx & <z,y>εa). Fra dette og (1) kan man så slutte at yεa"x. Dette er hva vi ønsker. **QED**.

I det følgende er det hendig å kunne snakke om det vi kaller L-bestemte formler. La α være en formel med x;1,...., x;n som distinkte fri variabler, for tydelighetens skyld benytter vi notasjonen α(x;1, ..., x;n). Da definerer vi:

Definisjon 6.7

L-Det(α(x;1, ... ,x;n)) ↔

(Ax;1)....(A;x;n)(α(x;1, ... ,x;n) → Nec(α(x;1, ... ,x;n))) &

(Ax;1)....(A;x;n)(¬α(x;1, ... ,x;n) → Nec(¬α(x;1, ... ,x;n)))

Med andre er en L-bestemt formel α en formel som er oppfylt av nøyaktig de samme elementer i enhver verden. Som et direkte korollar til Teorem 6.7 har vi:

Teorem 6.9 L-Det(α(x;1, ... ,x;n)) → Nec(L-Det(α(x;1, ... ,x;n)))

Den følgende sats viser hvordan L-bestemte formler kan konstrueres fra andre L-bestemte formler:

Teorem 6.10 (Prinsipper for konstruksjon av L-bestemte formler)

(a) L-Det(α) → L-Det((Ex)α)

(b) L-Det(α) → L-Det((Ax)α)

(c) L-Det(α) → L-Det(Pos(α))

(d) L-Det(α) → L-Det(Nec(α))

(e) L-Det(α) → L-Det(¬α)

(f) L-Det(α) & L-Det(β) → L-Det(α & β)

(g) L-Det(α) & L-Det(β) → L-Det(α ↔ β)

(h) L-Det(α) & L-Det(β) → L-Det(α v β)

(j) L-Det(α) & L-Det(β) → L-Det(α → β)

Bevis: *Ad (a)*: Anta (1) L-Det(α) & (Ex)α . Da har vi at (2) α holder for noe x. Videre har vi fra L-Det(α) at (3) α → Nec(α). Siden Nec(α) → Nec((Ex)α) følger (4) α → Nec((Ex)α). Fra dette og (2) følger Nec((Ex)α). Vi har derfor

(5) L-Det(α) → ((Ex)α → Nec((Ex)α))

© 2012 Morten Harboe Rognes

Anta (6) L-Det(α) & ¬(Ex)α. Anta for reduktio ad absurdum at (7) ¬Nec(¬(Ex)α)). Fra (7) følger (8) Pos((Ex)α). Siden L-Det(α), ifølge (6), har vi ved hjelp av Teorem 6.7 at (9) Nec(α→ Nec(α)). Fra (8) følger (Ex)Pos(α) og derfor (10) Pos(α) for noe x. Fra (9) og (10) kan man slutte Pos(Nec(α)) og derfor α. Fra det siste følger (Ex)α som strider mot (6). Det følger at (11) L-Det(α) → (¬(Ex)α → Nec(¬(Ex)α)). Punkt (a) følger fra (5) og (11).

Ad (b): Anta (1) L-Det(α). Vi må først vise (2) (Ax)α → Nec((Ax)α). Fra (1) følger per definisjon: (Ax)(α → Nec(α)). Herav har vi (Ax)α → (Ax)Nec(α). Ved hjelp av TA4 at (2) holder. Vi må dessuten vise: (3) ¬(Ax)α → Nec(¬(Ax)α). Dette er ekvivalent med (4) (Ex)¬α → Nec((Ex)¬α). Fra L-Det(α) følger: (Ax)(¬α → Nec(¬α)). Herav:
(5) (Ex)¬α → (Ex)Nec(¬α). Nå har man (Ax)(Nec(¬α) → Nec((Ex)¬α)). Herav følger (6) (Ex)Nec(¬α) → Nec((Ex)¬α). Fra (6) og (5) følger (4). Siden (4) er ekvivalent med(3) har vi at (3) holder. Fra (2) og (3) Følger L-Det((Ax)α).

Ad (c): Man har i kraft av TA2 at følgende holder:

(1) Pos(α) → Nec(Pos(α)) Videre har man ved hjelp av TA2

(2) ¬Pos(α) → Nec(¬α) → Nec(Nec(¬α)) → Nec(¬Pos(α))

Fra (1) og (2) følger umiddelbart at L-Det(Pos(α)). Da har man også (c) holder.

Ad (d): Man har ved hjelp av TA2 :

(1) Nec(α) → Nec(Nec(α))

(2) ¬Nec(α) → Pos(¬α) → Nec(Pos(¬α)) → Nec(¬Nec(α))

Fra (1) og (2) følger ved hjelp av definisjonen av L-Det at L-Det(Nec(α)). Derfor holder (d).

Ad (e): Det vil være tilstrekkelig å vise følgende dersom L-Det(α) holder:
(1) ¬α → Nec(¬α) & (¬¬α) → Nec(¬¬α). Dette er imidlertid ekvivalent med L-Det(α). Man har derfor at L-Det(α) → L-Det(¬α).

Ad (f): Anta (1) L-Det(α) & L-Det(β). Da har man:

(2.1) α→Nec(α) & ¬α → Nec(¬α)

(2.2) β → Nec(β) & ¬β → Nec(¬β)

Fra de to første konjunktene i henholdvis (2.1) og (2.2) har man

(3) α&β → Nec(α)&Nec(β) → Nec(α&β)

Videre har man de siste konjunktene i (2.1) og (2.2):

(4) ¬(α&β) → ¬α v ¬β → Nec(¬α) v Nec(¬β) → Nec(¬α v¬β) → Nec(¬(α&β)).

Fra (3) og (4) følger så L-Det(α&β). Dette viser at punkt (f) holder.

Ad (g) - (j): Siden vi har Nec((α→β) ↔ (¬(α& ¬β))) , Nec(αvβ) ↔Nec(¬(¬α&¬β)) og Nec((α↔β)↔(α→β & β→α)) kan man lett vise at punkt (g) -(j) holder ved hjelp av det vi har vist under punkt (e) og (f). **QED**.

I det neste teoremet defineres to funksjoner A0 og B0. Man bør merke seg at A0 er den funksjonen som tilordner ethvert par <x,y> den første komponenten i dette paret, nemlig x. Tilsvarende er B0 den funksjonen som tilordner ethvert par <x,y> den andre komponenten i dette paret, altså y. Man har altså at A0 anvendt på <x,y> gir en x og at B0 anvendt på <x,y> gir en y. Vi trenger denne satsen i beviset for Teorem 6.12.

Teorem 6.11 Definer:

A0 = {z: (Ex)(Ey)(z=<<x,y>,x> & xεV;a & yεV;a)}

B0= {z: (Ex)(Ey)(z=<<x,y>,y> & xεV;a & yεV;a)}

Da har man:

(i) Det(A0) & Det(B0)

(ii) Un(A0) & Un(B0)

(iii) A0 Inkl (V;a)^2 & B0 Inkl (V;a)^2

© 2012 Morten Harboe Rognes

Bevis: Siden vi har L-Det(At(x)) ikraft av TA7 og TA9 og dessuten L-Det(w=<<x,y>,x>) ogL-Det(w= <<x,y>,y>) følger det ved hjelp av Teorem 6.10 at Det(A0) og Det(B0). At man dessuten har Un(A0) og Un(B0) er det lett å sjekke. Det er dessuten opplagt at punkt (iii) i stasen holder. **QED**.
Den følgende sats sier at domenet til x og verdiområdet til x er egenskaper om x er en egenskap og at disse størrelsene er mengder om x er en mengde.

Teorem 6.12

(a) Set(x) → Set(Dom(x))
(b) Set(x) → Set(Rgn(x))
(c) At(x) → At (Dom(x))
(d) At(x) → At(Rgn(x))

Bevis: *Ad (a)*: Ved hjelp av Teorem 6.11 og Teorem 6.8 har man:
(1) Set(x) → Set(A0"x). Nå har vi:
(2) |- yεA0"x ↔ yεRgn(Rest(A0,x)
↔ (Ez)(<z,y>εA0Ω(xxV;a)
↔ (Ez) (<z,y>εA0 & zεx & yεA0)
↔ (Ez)(<z,y>εA0 & zεx)
↔ (Ez)(Er)(Es)(<<r,s>,r>=<z,y> & zεx & r,sεV;a)
↔ (Er)(Es)(r,sεV;a & y=r & <r,s>εx)
↔ (Es)(<y,s>εx)
↔ yεDom(x)

Vi har altså at (2) holder. Fra dette følger ved hjelp av universell generalisering og nødvendighetsregelen at Nec(A0"x = Dom(x)). Men da har vi Set(A0"x) → Set(Dom(x)). Fra dette og (1) følger at punkt (a) holder.

Ad (b): Beviset er blir helt analogt med det som er gitt i forbindelse med punkt (a). Man benytter imidlertid B0 istedet for A0.

Ad (c): Anta (1) At(x) Da har vi ved hjelp av TA16 at det finnes noe r slik at (2) Set(r) & (Ay)(yεr ↔ yεx). Herav har vi så ved hjelp av punkt (a) at (3) Set(Dom(r)) & (Ay)((Ez)(<z,y>εr) ↔ (Ez)(<z,y>εx)). Herav

(4) (Ay)(yεDom(r) ↔ yε Dom(x)). Fra dette og (3) følger:
(5) (Ew)(Set(w) & (Ay)(yεw ↔ yεDom(x))

Vi har nå vist: |- At(x) → (5). Ved hjelp av nødvendighetsregelen og det faktum at L-Det(At(x)) følger så: |- At(x) → Nec((5)). Men vi har |- Nec((5)) → At(Dom(x)) ved hjelp av TA26. Dette viser at punkt (c) holder.

Ad (d): Beviset blir helt analogt med det som er gitt under punkt (c), men man benytter nå resultatet under punkt (b). **QED**.

I det følgende teorem er C0 den funksjonen som tiordner ethvert par <x,y> det "omvendte" par <y,x>. Teoremet trengs i beviset for Teorem 6.14.

Teorem 6.13 Definer:

C0 = {z: (Ex)(Ey)(z= <<x,y>,<y,x>> & x,yε V;a}

Da har man:

Det(C0) & Un(C0) & C0 Inkl (V;a)^2

© 2012 Morten Harboe Rognes

Bevis: Vi overlater beviset for dette, som har likhetstrekk med beviset for Teorem 6.11, til leseren. **QED**.

Det følgende teorem sier at dersom x er en mengde er også x;-1 en mengde:

Teorem 6.14

(a) $Set(x) \rightarrow Set(x;-1)$

Bevis: Ved hjelp av Teorem 6.13 og Teorem 6.8 har man

(1) $Set(x) \rightarrow Set(C0"x)$ Nå har man

(2) $\vdash y \varepsilon C0"x \leftrightarrow (Ez)(z \varepsilon x \,\&\, \langle z,y\rangle \varepsilon C0)$
$\leftrightarrow (Ez)(z \varepsilon x \,\&\, (Es)(Et)(\langle z,y\rangle = \langle\langle s,t\rangle, \langle t,s\rangle\rangle))$
$\leftrightarrow (Ez)(Es)(Et)(z \varepsilon x \,\&\, z=\langle s,t\rangle \,\&\, y=\langle t,s\rangle)$
$\leftrightarrow (Es)(Et)(\langle s,t\rangle \hat{e} x \,\&\, y=\langle t,s\rangle)$
$\leftrightarrow y \varepsilon x;-1$

Fra (2) har vi ved hjelp av universell generalisering og nødvendighetsregelen at $Nec(C0"x = x;-1)$. Ved hjelp av dette kan man slutte $Set(C0"x) \rightarrow Set(x;-1)$. Her av følger så ved hjelp av (1) at $Set(x) \rightarrow Set(x;-1)$. **QED**.

Verdien til funksjonen a for argumentet x, i symboler a(x), innføres ved den følgende definisjon:

Definisjon 6.8

$a(x) = \{z: (Ey)(z \varepsilon y \,\&\, (Ar)(\langle x,r\rangle \varepsilon a \leftrightarrow r=y)\}$

Vi beviser:

Teorem 6.15

(a) $Det(a) \,\&\, a\ Inkl\ V;a\hat{}2 \,\&\, \langle x,y\rangle \varepsilon a \,\&\, (E!z)(\langle x,z\rangle \varepsilon a) \rightarrow a(x)=y$

(b) $Det(a) \,\&\, a\ Inkl\ (V;a)\hat{}2 \,\&\, \neg((Ey)(\langle x,y\rangle \varepsilon a)) \rightarrow a(x)=\emptyset$

(c) $Det(a) \,\&\, a\ Inkl\ (V;a)\hat{}2 \rightarrow At(a(x))$

Bevis: *Ad (a)*: (1) Det (a) & a Inkl (V;a)^2. Anta videre:

(2) $\langle x,y\rangle \varepsilon a \,\&\, (E!z)(\langle x,z\rangle \varepsilon a)$. Vi ønsker å vise at

(3) $Nec((At)(t\varepsilon a(x) \leftrightarrow t\varepsilon y))$. Nå har man fra (2) for vilkårlig t:

(4) $t\varepsilon a(x) \leftrightarrow (Ew)(t\varepsilon w \,\&\, (Ar)(\langle x,r\rangle \varepsilon a \leftrightarrow r=w)) \leftrightarrow t\varepsilon y$.

Herav: (5) $(At)(t\varepsilon a(x) \leftrightarrow t\varepsilon y)$. Vi har derfor som et teorem:

(6) $\langle x,y\rangle \varepsilon a \,\&\, (E!z)(\langle x,z\rangle \varepsilon a) \rightarrow (At)(t\varepsilon a(x) \leftrightarrow t\varepsilon y)$. Herav følger ved hjelp av nødvendighetsregelen:

(7) $Nec(\langle x,y\rangle \varepsilon a \,\&\, (E!z)(\langle x,z\rangle \varepsilon a) \rightarrow (At)(t\varepsilon a(x) \leftrightarrow t\varepsilon y))$

Siden vi har ifølge (1) at Det(a) har vi ved hjelp av Teorem 6.10 at

$L\text{-}Det(\langle x,y\rangle \varepsilon a) \,\&\, L\text{-}Det((E!z)(\langle x,z\rangle \varepsilon a))$. Det følger at

$Nec(\langle x,y\rangle \varepsilon a \,\&\, (E!z)(\langle x,z\rangle \varepsilon a))$, og derfor sammen med (7) at

(8) $Nec((At)(t\varepsilon a(x) \leftrightarrow t\varepsilon y))$. Vi har, om (2) holder, at (9) $Nec(a(x) = UN(\{y\}))$. Nå har man ifølge Teorem 6.1 at (10) $At(\{y\})$ siden det følger fra (1) at At(y). Fra (10) og foreningsmengdeaksiomet, ie. TA22, følger (11) $At(UN(\{y\}))$. Fra (8), (9), (11), det faktum

© 2012 Morten Harboe Rognes

at At(y) og aksiom TA11 følger så a(x)=y. Dette viser at punkt (a) holder.

Ad (b): Anta (1) Det(a) & a Inkl (V;a)^2 & ¬((Ey)(<x,y>εa)). Fra dette følger ved hjelp av Teorem 6.10 at Nec(¬(Ez)(zεa(x))). Herav har man Nec((Az)(zεa(x) ↔ zεø). Siden vi har At(a(x)) & At(ø) følger ved hjelp av identitetsaksiomet TA11 at a(x)=ø.

Ad (c): Anta (1) Det(a) & a Inkl (V;a)^2. Man beviser lett på basis av definisjonen av a(x) at:

(2) Nec((Ay)((Ar)(<x,r>εa ↔ r=y) → a(x) = UN({y}))

(3) Nec(¬(Ey)((Ar)(<x,r>εa ↔ r=y)). → a(x)=ø)

Fra (1) følger (4) L-Det((Ar)(<x,r>εa ↔ r=y)).

Tilfelle (i): (Ey)((Ar)(<x,r>εa ↔ r=y)). Da har vi (Ar)(<x,r>εa ↔ r=y) for noe y og derfor i lys av (4) at Nec((Ar)(<x,r>εa ↔ r=y)). Fra dette og (2) følger Nec(a(x) = UN({y})). Siden vi har At(UN({x})) i kraft av parmengde aksiomet og foreningsmengdeaksiomet følger følger At(a(x)).

Tilfelle (ii) ¬(Ey)((Ar)(<x,r>εa ↔ r=y)) I lys av (4) og (3) følger da Nec(a(x)=ø). Siden At(ø) har vi da At(a(x)). Dette viser at punkt (c) holder. **QED**.

Tilslutt innfører vi predikatet "a er en funksjon der domenet er b", i symboler "a Fn b", og predikatet "a er en en-entydig funksjon der domenet er b", i symboler "a Fn2 b", ved den følgende definisjon:

Definisjon 6.9

(a) a Fn b ↔ Fnc(a) & Dom(a) = b

(b) a Fn2 b ↔ Fnc;2(a) & Dom(a) = b

Teorem 6.16

(a) Det(a) & a Inkl (V;a)^2 & Set(y) & a Fn y → Set(a)

(b) Det(a) & a Inkl (V;a)^2 & Set(y) & a Fn2 y → Set(a)

Bevis: *Ad (a)*: Anta (1) Det(a) & a Inkl (V;a)^2 & Set(y) & a Fn y. Da følger ved hjelp av Teorem 6.8 at (2) Set(a"y). Herav følger videre (3) Set(y x a"y). Nå viser man lett at (4) a Inkl y x a"y. Fra (3) følger At(yxa"y). Fra dette og (4) følger ved hjelp av Teorem 6.3h at At(a). Men siden Det(a) kan vi da slutte Set(a).

Ad (b): Dette følger umiddelbart fra (a) siden aFn2 y impliserer aFn y. **QED**.

§7 Grunnleggende setninger om ordinaltall i MZFC

Hensikten med dette avsnittet er å gi en presis definisjon av begrepet ordinaltall innenfor rammen av MZFC. Dessuten ønsker vi å bevise en rekke grunnleggende, om enn elementære, setninger om ordinaltall som vi har bruk for i de etterfølgende paragrafene.

Vi definerer et ordinaltall som en transitiv mengde som er velordnet ved hjelp av relasjonen ε. For at denne definisjonen skal gi noen mening må det naturligvis forklares hva som menes med en transitiv mengde og hva som menes med at en relasjon er en velordning over a. For å definere det siste finner vi det hensiktsmessig å definere hva som menes med at en relasjon er velfundert over en mengde a. For å definere presist det første forklarere vi hva som menes med at a er en klasse, i symboler Cl(a).

La oss først definere hva som menes med at a er ekstensjonalt inkludert ib og hva som menes med at a er ekstensjonalt identisk med b. Definisjonene er som følger:

© 2012 Morten Harboe Rognes

Definisjon 7.1

(i) a Inkl;e b ↔ (Ax)(xεa → xεb)

(ii) a =;e b ↔ (Ax)(xεa ↔ xεb)

Man ser at a er ekstensjonalt inkludert i b, ie a Inkl;e b hvis og bare hvis enhver entitet som har egenskapen a også har egenskapen b. Man har at a er ekstensjonalt identisk med b, a =;b, hvis og bare hvis de entitetene som har egenskapen a har egenskapen b og omvendt. Man krever ikke at dette skal være tilfelle med nødvendighet.

I det følgende leses uttrykket "Cl(a)" som " a er en klasse". For at a skal være en klasse krever vi enten at a er bestemt, inkludert i universet av attributter og ikke-tom, eller at a er bestemt og identisk med nullmengden. Vi sier at R er en fundert relasjon over a hvis og bare hvis ethvert ikke-tomt attributt som er inkludert i a inneholder et R-minimalt element. Videre sier vi at R er en velfundert relasjon over a hvis og bare hvis R er en fundert relasjon over a og man for hvert xεa har at egenskapen å være en y der yεa & yRx faktisk finnes.

R sies å være en velordning over a nøyaktig når R er en fundert relasjon over a og man har at xRy v x=y v yRx for alle elementer x,y der x,y har egenskapen a. Endelig sies R å være en velfundert velordning over a om R er en velordning over a og dessuten en vefundert relasjon over a.

Dewt følgende er en formel definisjon av disse begrepene:

Definisjon 7.2

(a) CL(a) ↔. (Det(a) & a Inkl V;a & (Ex)(xεa)) v
(Det(a) & a=ø & ¬(Ex)(xεa))

(b) R Fr a ↔ (Ax)(x Inkl;e a & x≠ø & At(x) →
(Ey)(yεx & xΩR;-1"{y}=ø))

(c) R WFr a ↔. R Fr a & (Ax)(xεa → At(aΩR;-1"{x}))

(d) R We a ↔ R Fr a & (Ax)(Ay)(x,yεa →. xRy v x=y v yRx)

(e) R Wfwe a ↔ R Wfr a & R We a

Det følgende teorem sier at dersom R er en velfundert veordning over a så er R også en transitiv relasjon over a. Punkt (b) i satsen sier at dersom R er en velfundert velordning over a og b er en ikke-tom egenskap som er ekstensjonalt inkludert i a inneholder b et R-minimalt element:

Teorem 7.1

(a) R Wfwe a → (Ax)(Ay)(Az)(x,y,zêa & xRy & yRz → xRz)

(b) R Wfwe a & b Inkl;e a & b≠ø → (Ex)(xεb & bΩR;-1"{x}=ø)

Bevis: *Ad (a)*: Anta at (1) R Wfwe a, og dessuten, for reduktio, at det finnes x,y zεa slik at (2) xRy & yRz og ¬(xRz). Fra (1) og definisjonen av Wfwe følger at:

(3) (Ax)(Ay)(x,yêa → xRy v x=y v yRx). Fra (2) og (3) følger

(4) x=z v zRx. Vi skiller mellom to tilfelle:

Tilfelle (i): x=z. Fra (1) følger R Fr a og derfor:

(5) (Aw)(w Inkl;e a & w≠ø & At(w) → (Ey)(yεw & wΩR;-1"{y}=ø))

Sett per definisjon: (6) w0= {z,y}. Siden z,y êa har vi åpenbart w0={z,y} Inkl;e a. Videre har vi w0≠ø og At(w0). Det følger derfor ved hjelp av (5) at at

© 2012 Morten Harboe Rognes

(Ev)(vεw0 & w0Ω R;-1"{v}=ø). Dette impliserer, siden w0= {z,y}, at (Ev)((v=z v v=y) & {z,y}Ω {r: rRv}=ø). Dette impliserer at {z,y}Ω {r: rRz}=ø eller at {z,y}Ω {z: zRy}=ø. Men siden vi har i dette tilfelle har zRy &yRz er begge mulighetene utelukket. Vi utleder altså en motsigelse i dette tilfellet.

Tilfelle (ii): zRx. Da har vi i lys av (2) at (7) xRy & yRz & &zRx. Sett w1 = {x,y,z}. Da har vi åpenbart ved hjelp av parmengde- og foreningsmengdeaksiomet at At(w1) & w1≠ø & w1 Inkl;e a. Det følger da, siden R Fr a at

(Ev)(vêw1 & w1ΩR;-1"{v} ≠ø).

Men dette impliserer at enten {x,y,z}Ω {r: rRz}=ø eller at {x,y,z}Ω {r: rRy}=ø eller at {x,y,y}Ω {r: rRz}=ø . Men alle disse mulighetene er utelukket i lys av (7).

I begge tilfelle utledes en motsigelse. Dette innebærer at det er umulig å finne x,y,zεa slik at (2). Dette viser at punkt (a) holder.

Ad (b): Anta (1) R Wfwe a & b Inkl;e a & b≠ø . Fra den tredje konjunkten i (1) følger at det finnes x der (2) xεb. Vi skiller mellom to tilfelle:

Tilfelle (i): bΩR;-1"{x}=ø. Da holder satsen ved hjelp av (1)

Tilfelle (ii): bΩR;-1"{x}≠ø. Det følger fra (1) at R WFr a. Siden b Inkl;e a følger det at (3) R WFr b. Herav har man så, siden xεb, at (4) At(bΩ R;-1"{x}). Dette impliserer at det finnes y slik at (5) At(y) & y = bΩR;-1"{x} Herav følger (6) y Inkl b, og videre siden bΩR;-1"{x} ≠ø at (7) y≠ø. Fra dette , (5), (6) og (3) følger så ved hjelp av definisjonen av WFr at det finnes z slik at (8) zεy & yΩR;-1"{z} =ø. Siden zεy har vi ved hjelp av (5) at (9) zεb & zRx. Vi ønsker å bevise bΩ R;-1"{z}=ø. Anta for reduktio at (10) wεbΩ R;-1"{z} for noe w. Da (11) wεb & wRz. Fra (9) og (11) og punkt (a) har vi wRx & wεb. Herav wεbΩR;-1"{x}=y. Men da wεyΩR;-1"{z} i lys av (11). Men dette strider mot (8). Derfor bΩ R;-1"{z}=ø. Dette sammen med (9) impliserer:

(Ez)(zêb & bΩ R;-1"{z}=ø) som er det vi ønsker.

I begge tilfelle har vi (Ez)(zêb & bΩ R;-1"{z}=ø). Dette viser at punkt (b) holder. **QED**.

Er R en velfundert velordning, er videre b ekstensjonalt inkludert i a og har vi for ethvert x at x har egenskapen b dersom egenskapen aΩR;-1"{x} er ekstensjonalt inkludert i b, kan man konkludere med at a er ekstensjonalt identisk med b. Dette er innholdet i det følgende teorem:

Teorem 7.2 R Wfwe a & (Ax)(aΩR;-1"{x} Inkl;e b → xεb) → (b Inkl;e a → a=;e b)

Bevis: Anta (1) R Wfwe a & (Ax)(aΩR;-1"{x} Inkl;e b → xεb) . Anta videre (2) b Inkl;e a. Anta endelig for reduktio at absurdum at (3) ¬(a =;e b) Da har man (4) (a-b) ≠ø og at (5) a-b Inkl;e a Fra (1),(4),(5) og Teorem 7.1 kan man slutte at det finnes x der vi har (6) xε(a-b) & (a-b)Ω R;-1"{x}=ø. Da

(7) ¬(Ey)(yε(a-b) & yεR;-1"{x}) ↔ (Ay)(yεR;-1"{x} & yεa → yεb)
↔ (Ay)(yεaΩR;-1"{x} → yεb
↔ aΩR;-1"{x} Inkl;e b

Fra (6) og (7) følger aΩR;-1"{x} Inkl;e b. Fra det6te og (1) har man så: xêb. Men dette strider mot (5). Man ser at (3) leder til en motsigelse. Derfor a =;e b. **QED**.

Har man xεy har man entiteten x har egenskapen y. Mengden av alle de par <x,y> der x har egenskapen y vil vi i det følgende betegne med E. Vi skal kalle denne relasjonen, som er motstykket til mengdemedlemskaps-relasjonen for attributalrelasjonen. Vi definerer hva som menes med at en klasse a er transitiv, i symboler Tr(a), ved å kreve at a skal være en klasse,

© 2012 Morten Harboe Rognes

videre at alle elementer i a er mengder og endelig ved å kreve at ethvert element som er med i et element i a selv er med i a. Et ordinaltall a er en transitiv mengde hvor attributal-rlasjonen velordner a. Endelig betegner On mengden av alle ordinaltall. Disse definisjonene kan formelt sammenfattes slik:

Definisjon 7.3

(a) E = {<x,y>: xεy}
(b) Tr(a) ↔ . CL(a) & (Ax)(xêa → Set(x)) & (Ax)(Ay)(xεy & yεa → xεa)
(c) Ord(a) ↔ Tr(a) & E We a
(d) On = {x: Ord(x)}

Man har at a er et ordinaltall hvis og bare hvis a er transitiv og alle elementene som har egenskapen a er sammenlignbare med hensyn på ε:

Teorem 7.3 Ord(a) ↔ Tr(a) & (Ax)(Ay)(x,yεa → xεy v x=y v yεx)

Bevis: (i) Kondisjonalen mot høyre følger umiddelbart fra definisjonen av Ord, siden denne innebærer at E er en velordning over a og at a er transitiv. (ii). Når det gjelder kondisjonalen mot høyre viser vi først at (1) E Fr a. For å vise dette, anta for vilkårlig x at
(2) x≠ø & x Inkl;e a & At(x). Da har vi (3) (Ey)(yεx) & At(x). Nå sier TA24 at

(4) (Ax)(At(x) &(Ey)(yεx) → (Ez)(zεx & ¬(Ew)(wεz & wεx)))

Fra (3) og (4) følger for noe z: (5) zεx & ¬(Ew)(wεz & wεx). Nå har vi wεE;-1"{z} = wεz. Fra (5) følger derfor: zêx & xΩE;-1"{z}=ø. Vi har altså, siden x var vilkårlig element slik at (2):

(Ax)(x≠ø & x Inkl;e a & At(x) → (Ez)(zêx & xΩE;-1"{z}=ø))

Fra dette følger (1). Anta nå (6) Tr(a) & (Ax)(Ay)(x,yεa → xεy v x=y v yεx). Fra dette og (1) følger ved hjelp av Definisjon 7.2 at E We a & Tr(a). Fra dette og Definisjon7.3 følger så at Ord(a). **QED**.

Er a et ordinaltall og b en ikke-tom egenskap inkludert i a så finnes det et element x i b som ikke har noen elementer tilfelles med b:

Teorem 7.4 Ord(a) & b Inkl a & b≠ø → (Ex)(xεb & b Ωx =ø)

Bevis: Anta (1) Ord(a) & b Inkl a & b≠ø. Fra (1) og definisjonen av Ord følger
(2) E We a. Vi skal vise (3) E WFwe a. I lys av Definisjon 7.2 er det da nok å vise at
E Wfr a. Siden vi i forrige bevis viste at E Fr a er det tilstrekkelig å vise at

(Ax)(xεa → At(aΩ E;-1"{x})) Siden E;-1"{x} = x er det nok å vise:

(Ax)(xεa → At(aΩx)). Er xεa har vi ved ved hjelp av TA7 at At(x) og derfor ved hjelp av vår versjon av utsondringsaksiomet at At(aΩx). Vi har dermed vist at (3) holder.

Fra (3) og (1) følger ved hjelp av Teorem 7.1b at (Ex)(xεb & bΩE;-1"{x}=ø). Siden E;-1"{x} = x følger herav: (Ex)(xεb & b Ωx =ø). **QED**.

Uttrykket "a er strengt inkludert i b" forkortes med "a SInkl b". Vi gir den følgende definisjon:

Definisjon 7.4 a SInkl b ↔. Nec((Ax)(xεa → xεb) & (Ex)(xεb& ¬ (xεa)))

Det følgende teorem sier at dersom a er transitiv og b har egenskapen a så er b strengt

© 2012 Morten Harboe Rognes

inkludert i a:

Teorem 7.5 Tr(a) & bεa → b SInkl a

Bevis: Anta (1) Tr(a) & bεa. Ved hjelp av definisjonen av Tr følger fra (1) at
(2.1) CL(a)
(2.2) (Ax)(xêa → Set(x))
(2.3) (Ax)(Ay)(xεy & yεa → xεa)
Fra den andre konjunkten i (1) har vi (4) at det finnes y slik at (3) At(y) & yεa & y=b. Fra (2.3) og (3) kan man slutte at (4) (Ax)(xεb → xεa). Anta for reduktio ad absurdum at (5) (Ax)(xεa → xεb). Siden CL(a) ifølge (2.1) har vi at Det(a). Dette impliserer at (6) L-Det(xεa). Fra (2.2) og (3) følger at (7) Set(y). Siden At(y) & y=b ifølge (3) har vi (8) Nec(y=b). Fra dette, (7) og Teorem 6.2 følger (9) Set(b). Herav følger (10) L-Det(xεb). Fra (5), (6) og (10) kan man slutte Nec(Ax)(xεa ↔ xεb). Anta nå for reduktio ad absurdum at (11) (Ax)(xεa → xεb). Da har vi ved hjelp av (6) og (10) at Nec((Ax)(xεa↔ xεb)) og derfor siden Nec(y=b) at Nec(y=a). Det følger da at y=a og derfor ved hjelp av (3) at (12) yεy. Men fra (3) følger ved hjelp av parmengdeaksiomet, TA20, At({y}) Da har vi at det finnes z slik at z={y} & (Ev)(vεz). Fra dette og fundierungsaksiomet følger: (Er)(rε{y} & ¬(Ev)(vεr & vε{y})) og derfor for noe r at r=y & ¬(Ev)(vεr & v=y). Fra dette følger så ¬(yεy). Det følger at (12) er umulig og derfor at (11) er umulig. Vi har derfor: (13) (Ex)(xεa & ¬(xεb)). og derfor sammen med (4) at
(14) (Ex)(xεa & ¬(xεb)) & (Ax)(xεb → xεa). Fra dette (6),(10) og Teorem 6.10 følger: Nec((Ex)(xεa & ¬(xεb)) & (Ax)(xεb → xεa)). Ved hjelp av Definisjon 7.4 har vi så: b SInkl a. **QED**.

Teorem 7.6 (n>=1) & R Fr a & Konj/j,1,n/(x;jεa) → ¬(x;1Rx;2 & x;2 R x;3 & ....& x;nRx;1)

Denne satsen sier, som man ser, at dersom R er en fundert relasjon over a kan det ikke finnes entiteter x;1, ..., x;n som alle har egenskapen a og der man samtidig har
x;1Rx;2 & x;2Rx;3 & ..... & x;n R x;1

Bevis: Anta (1) R Fr a & Konj/j,1,n/(x;jεa) & n>=1. Anta for reduktio (2) x;1Rx;2 & x;2 R x;3 & ....& x;nRx;1. Sett per definisjon C= {x;1,....,x;n}. Da har man x;1εC & (Ax)(xεC → (Ey)(yεC & yRx)). Det følger at C≠ø & C Inkl A. Videre følger ¬(Ex)(xεC & CΩ {y: yRx) =ø). Siden man lett ved hjelp av parmengdeaksiomet og foreningsmengdeaksiomet viser at Set(C) følger ved hjelp av definisjonen av Fr i Definisjon 7.2 at ¬(R Fr a). Dette strider mot (1). Det følger at (2) er usann. **QED**.

Er a et ordinaltall og b et element i a så er også b et ordinaltall. Dette er hva den følgende sats uttrykker:

Teorem 7.7 Ord(a) & bεa → Ord(b)

Bevis: Anta (1) Ord(a) & bεa. Ved hjelp av definisjonen av Ord følger (2) Tr(a). Fra dette følger så:
(3.1) CL(a)
(3.2) (Ax)(xεa → Set(x))

© 2012 Morten Harboe Rognes

(3.3) $(Ax)(Ay)(x\varepsilon y \,\&\, y\varepsilon a \rightarrow x\varepsilon a)$

Siden $b\varepsilon a$ har vi ved hjelp av (3.3) at (4) b Inkl a. Anta for vilkårlige v,w at $v\varepsilon w \,\&\, w\varepsilon b$. Da har vi ved hjelp av (4) at $v\varepsilon w \,\&\, w\varepsilon a$. Fra dette og (3.3) følger $v\varepsilon a$. Vi har derfor:

(5) $(Ax)(Ay)(x\varepsilon y \,\&\, y\varepsilon b \rightarrow x\varepsilon a)$. Fra (1) følger videre ved hjelp av Definisjon 7.3 (6) E We a. Dette og (4) impliserer (7) E We b. Anta for reduktio ad absurd at

(+) $\neg(Ax)(Ay)(x\varepsilon y \,\&\, y\varepsilon b \rightarrow x\varepsilon b)$

Da finnes det x,y slik at (8) $x\varepsilon y \,\&\, y\varepsilon b \,\&\, \neg(x\varepsilon b)$. Fra (8) og (5) følger $x\varepsilon a$. Fra dette og (1) kan man slutte $x,b\varepsilon a$ og derfor ved hjelp av (6) at (9) $x\varepsilon b \vee x=b \vee b\varepsilon x$. Dette og (8) impliserer (10) $x=b \vee b\varepsilon x$. Er $x=b$ har man ved hjelp av (8) at $b\varepsilon y\varepsilon b$. Siden E Fr a er dette umulig i lys av Teorem 7.6. Vi har derfor $x\neq b$ og da $b\varepsilon x$. Men da har vi igjen ved hjelp av (8) at $b\varepsilon x\varepsilon y\varepsilon b$ som også åpenbart er umulig i lys av Teorem 7.6 siden E Fr a. Det følger at at (+) er umulig og at man har

(11) $(Ax)(Ay)(x\varepsilon y \,\&\, y\varepsilon b \rightarrow x\varepsilon b)$. Sideb $b\varepsilon a$ har vi ved hjelp av (3.2)

(12) Set(b) Videre har vi om $x\varepsilon b$ at $x\varepsilon a$ ved hjelp av (4), og derfor Set(x) ved hjelp av (3.2). Det følger at

(13) $(Ax)(x\varepsilon b \rightarrow Set(x))$

Vi må vise at (14) CL(b). Ifølge Definisjon 7.2 innebærer dette at vi må vise:

(14.1) $(Det(b) \,\&\, b \text{ Inkl } V;a \,\&\, (Ex)(x\varepsilon b)) \vee (Det(b) \,\&\, b=\varnothing \,\&\, \neg(Ex)(x\varepsilon b))$

Fra (12) følger Det(b) og siden b Inkl a Inkl V;a har vi b Inkl V;a. Har man $\neg(Ex)(x\varepsilon b)$ har vi derfor $(Det(b) \,\&\, b=\varnothing \,\&\, \neg(Ex)(x\varepsilon b))$. Har man $(Ex)(x\varepsilon b)$ har man $(Det(b) \,\&\, b \text{ Inkl } V;a \,\&\, (Ex)(x\varepsilon b))$. Uansett har man at (14.1) holder og derfor at (14) holder. Fra (7), (14), (13) og (11) følger ved hjelp av definisjonen av Ord at Ord(b). **QED**.

Det første punktet i det følgende teorem sier at dersom a er et ordinaltall og b en transitiv mengde så er b strengt inkludert i a hvis og bare hvis b har egenskapen a. Det andre punktet er en umiddelbar konskevens av det første. Det tredje punktet sier at snittet av to ordinaltall selv er et ordinaltall:

Teorem 7.8

(a) $Ord(a) \,\&\, Tr(b) \rightarrow (b \text{ SInkl } a \leftrightarrow b\varepsilon a)$

(b) $Ord(a) \,\&\, Ord(b) \rightarrow (b \text{ SInkl } a \leftrightarrow b\varepsilon a)$

(c) $Ord(a) \,\&\, Ord(b) \rightarrow Ord(a\Omega b)$

Bevis: *Ad (a)*: Anta (1) Ord(a) & Tr(b). Ved hjelp av Teorem 7.5 kan man fra (1) slutte at (2) $b\varepsilon a \rightarrow b \text{ SInkl } a$. Det vil derfor være tilstrekkelig å vise at $b \text{ SInkl } a \rightarrow b\varepsilon a$. Anta derfor at (3) b SInkl a. Da har vi $a\text{-}b\neq\varnothing$. & $b\text{-}a \text{ Inkl } a$. Fra dette (1) og Teorem 7.4 kan man slutte at det finnes x slik at (4) $x\varepsilon(a\text{-}b) \,\&\, (a\text{-}b)\Omega x=\varnothing$. Siden $x\varepsilon a$ og Tr(a) følger fra (1), kan man ved hjelp av Teorem 7.5 slutte at x SInkl a. Siden $(a\text{-}b)\Omega x=\varnothing$ har vi (5) $(Ay)(y\varepsilon x \rightarrow y\varepsilon b)$. Siden $x\varepsilon a$ følger det at Set(x) og dessuten har vi fra (1) at Tr(b). Da har vi CL(b) og derfor at Det(b). Siden Set(x) & Det(b) kan vi fra (5) slutte (6) $Nec((Ay)(y\varepsilon x \rightarrow y\varepsilon b))$. Herav følger så (7) x Inkl b. Vi ønsker nå å vise: (+) $(Ay)(y\varepsilon b \rightarrow y\varepsilon x)$. Anta derfor for vilkårlig y at (8) $y\varepsilon b$. Fra dette og (3) følger $y\varepsilon a$. Fra (4) følger $x\varepsilon a$. Vi har derfor (9) $x,y\varepsilon a$. Siden Ord(a) har vi E We a, og derfor (10) $x\varepsilon y \vee x=y \vee y\varepsilon x$. Siden Tr(b) kan vi slutte:
(11) $x\varepsilon y \,\&\, y\varepsilon b \rightarrow x\varepsilon b$. Herav følger: (12) $(x\varepsilon y \vee x=y) \,\&\, y\varepsilon b \rightarrow x\varepsilon b$. Fra dette og (8) følger videre: (13) $(x\varepsilon y \vee x=y \rightarrow x\varepsilon b)$. Fra (4) har man $\neg(x\varepsilon b)$. Ved hjelp av (13) kan man derfor slutte: $\neg(x\varepsilon y \vee x=y)$. Herav følger ved hjelp av (10): $y\varepsilon x$. Men y var et vilkårlig element slik at (8). Det følger at (14) $(Ay)(y\varepsilon b \rightarrow y\varepsilon x)$. Siden Set(x) & Det(b) kan vi derfor

© 2012 Morten Harboe Rognes

slutte at Nec((Ay)(yεb → yεx)) med andre ord b Inkl x. Fra dette og (6) følger Nec((Ay)(yεx ↔ yεb)). Herav Nec(x=b). Siden xεa kan vi da slutte bεa. Dette viser at punkt (a) holder.

Ad (b): Dette er et direkte korollar til (a) siden Ord(b) impliserer Tr(b).

Ad (c): Anta (1) Ord(a) & Ord(b). Fra Ord(a) følger (2) E We a. Vi har aΩb Inkl a. Fra dette, (2) og definisjonen av We, Definisjon 7.2, kan man slutte:

(3) E We aΩb. Videre følger fra (1),(2) og definisjonen av Ord, følger en mer at Tr(a) & Tr(b) og derfor ved hjelp av punkt (a):

xε(aΩb) → xεa & xεb
→ x SInkl a x SInkl b
→ x Sinkl aΩb

Det følger fra dette at (4) (Az)(Aw)(zεw & wε(aΩb) → zε(aΩb))
Fra Tr(a) & Tr(b) følger også (5) (Ax)(xε(aΩb) → Set(x)). Vi må nå også vise at CL(aΩb), med andre ord i lys av definisjonen av CL(a) at:

(+) (Det(aΩb) & aΩb Inkl V;a & (Ex)(xεaΩb)) v
(Det(aΩb) & aΩb=ø & ¬(Ex)(xεaΩb))

Siden Det(a) & Det(b) har vi (6) Det(aΩb). Siden Tr(a) & Tr(b) har vi a Inkl V;a og derfor (7) aΩb Inkl V;a. Hva enten (Ex)(xε(aΩb)) er tilfelle eller ikke ser man at (+) holder i lys av (6) og (7). Fra (4), (5) og (+) følger Tr(aΩb). Dette, (3) og definisjonen av Ord impliserer Ord(aΩb). Dette viser at punkt (c) holder. **QED**.

Den neste satsen sier at to ordinaltall alltid er sammenlignbare med hensyn på egenskapsrelasjonen ε:

Teorem 7.9 Ord(a) & Ord(b) →. aεb v a=b v bεa

Bevis: Anta (1) Ord(a) & Ord(b). Vi har trivielt: (2) aΩb Inkl a og (2) aΩb Inkl b
Anta for reduktio ad absurdum at (3) aΩ b SInkl a & aΩb SInkl b. Fra (1) og Teorem 7.8c følger: (4) Ord(aΩb). Fra (1) og definisjonen av Ord følger (5) Tr(a) & Tr(b). Fra (3), (4) og (5) følger ved hjelp av Teorem 7.8a at (6) (aΩb)εa & (aΩb)εb. Fra dette følger (aΩb)ε(aΩb). Dette er umulig siden det strider mot Fundierungsaksiomet. Det følger at (3) er usann og derfor at (6) ¬(aΩ b SInkl a) v ¬(aΩb SInkl b). Siden (5) holder har vi CL(a) og CL(b) og derfor (7) Det(a) & Det(b). Fra (2),(6) og (8) følger derfor

(9) aΩb = b v aΩb= a. Herav har vi så ved hjelp av (7) at a Inkl b v b Inkl a. Fra dette følger så (10) a SInkl b v a=b v b SInkl a. Fra (1), Teorem 7.8a og (10) følger så det man ønsker, nemlig: aεb v a=b v bεa. **QED**.

Det følgende teorem sier at ethvert ordinaltall er en mengde, at CL(a) og Tr(a) er L-bestemte og at mengden av ordinaltall er en klasse:

Teorem 7.10

(a) Ord(x) → Set(x)
(b) CL(a) → Nec(CL(a)) & ¬CL(a) → Nec(¬CL(a))
(c) Nec(CL(a) → Nec(CL(a))) & Nec(¬CL(a) → Nec(¬CL(a)))
(d) Tr(a) → Nec(Tr(a)) & ¬Tr(a) → Nec(¬Tr(a))
(e) Nec(Tr(a) → Nec(Tr(a)) & ¬Tr(a) → Nec(¬Tr(a)))
(f) CL(On)

© 2012 Morten Harboe Rognes

Beviset for denne satsen er temmelig langt.

Bevis: *Ad (a)*: Anta (1) Ord(x). Fra (1) følger ved hjelp av Definisjon 7.3 at Tr(x). Fra dette og definisjonen av Tr følger så CL(x), som i sin tur impliserer Det(x). Dette innebærer at (2) (Ay)(yεx → Nec(yεx)) & (¬(yεx) → Nec(¬(yεx))). Ved hjelp av TA7 har vi At(x). Det følger fra dette, (2) og definisjonen av Set at Set(x).

Ad (b): (I) Anta (1) CL(a). I lys av definisjonen av CL er det naturlig å skille mellom to tilfelle:

Tilfelle (i): Man har (2) Det(a) & a Inkl V;a & (Ex)(xεa). Fra Det(a) følger ved hjelp av Korollar 6.7.1 (3) Nec(Det(a)). Nå har man at den andre konjunkten i (2) sier at Nec((Ay)(yεa → At(y)). Ved hjelp av TA2 har man da (4) Nec(a Inkl V;a). Fra det at Det(a) følger (Ax)(xεa → Nec(xεa)). Fra dette og den siste konjunkten i (2) følger (Ex)Nec(xεa). Herav utledes (5) Nec((Ex)(xεa)). Fra (3),(4), (5) og definisjonen av CL utleder man Nec(CL(a)).

Tilfelle (ii): (6) Det(a) & ¬(Ex)(xεa) & a=ø. Fra den første konjunkten følger på samme måte som i foregående tilfelle at (9) Nec(Det(a)). Videre impliserer Det(a) at (Ax)(¬(xεa) → Nec(¬(xεa)). Fra dette og den andre konjunkten i (8) følger (Ax)Nec(¬(xεa)). Herav Nec((Ax)¬(xεa)) og derfor (10) Nec(¬(Ex)(xεa)). Vi har a=ø er ekvivalent med (Ax)(xεa ↔ xεø) som i sin tur er ekvivalent med (11) (Ax)(xεa ↔ x≠x). Siden Det(a) har vi L-Det(xεa). Siden det er åpenbart at L-Det(x=x) følger det at L-Det((Ax)(xεa ↔ x≠x)). Fra dette og (11) følger Nec((Ax)(xεa ↔ x≠x)) og derfor (12) Nec(a=ø). Fra (9), (10) , (12) og definisjonen av CL kan man utlede Nec(CL(a)).

I begge tilfelle har man Nec(CL(a)). Dette viser den ene halvdelen av punkt(b).

(II) Vi må imidlertid også vise den andre halvdelen av punkt (b), med andre ord at ¬CL(a) → Nec(¬CL(a)). Siden dette er ekvivalent med (13) Pos(CL(a)) → CL(a) er det nok å vise dette. Anta derfor (14) Pos(CL(a)). I lys av definisjonen av CL(a) ser man at det er naturlig å skille mellom to tilfelle:

Tilfelle (i): (15) Pos(Det(a) & a Inkl V;a & (Ex)(xεa)). Fra dette følger: (16) Pos(Det(a)). Nå har man ifølge korollar 7.6.1 |- Det(a) → Nec(Det(a)). Herav |- Nec(Det(a) → Nec(Det(a))). Fra dette og (16) følger Pos(Nec(Det(a)). Herav har vi så (17) Det(a) siden man lett fra de modale aksiomene TA1 - TA3 utleder Pos(Nec(α)) →α.

Fra (15) kan man videre slutte at (18) Pos(a Inkl V;a). Nå har man |- a Inkl V;a → Nec(a Inkl V;a) og derfor Nec(a Inkl V;a → Nec(a Inkl V;a)). Fra dette og (18) følger Pos(Nec(a Inkl V;a))) og derfor (19) a Inkl V;a.

Fra (15) følger (20) Pos((Ex)(xεa)). Fra (17) følger ved hjelp av Korollar 6.71 at Nec((Ay)(yεa →Nec(yεa))). Herav kan man utlede: Nec((Ex)(xεa) → Nec((Ex)(xεa))) Fra dette og (20) har vi Pos(Nec((Ex)(xεa)) og derfor (21) (Ex)(xεa). Fra (17), (19), (21) og definisjonen av CL følger CL(a).

Tilfelle (ii): (22) Pos(Det(a) & a=ø & ¬(Ex)(xεa)) På samme måte som ovenfor følger fra (22):

(22.1) Det(a)

Dessuten følger:

(22.2) Pos(a=ø)

(22.3) Pos(¬(Ex)(xεa))

Fra (22.1) følger Nec((Ax)(¬xεa → Nec(¬xεa))) og herav ved hjelp av TA4:

Nec(¬(Ex)(xεa) → Nec(¬(Ex)(xεa))). Fra dette og (22.3) har vi (23) ¬(Ex)(xεa). Fra (22.1) følger L-Det(xεa). Videre har man L-Det(xεø). Man har derfor L-Det((Ax)(xεa ↔ xεø)). Da

© 2012 Morten Harboe Rognes

(24) $(Ax)(x\varepsilon a \leftrightarrow x\varepsilon \emptyset) \rightarrow Nec((Ax)(x\varepsilon a \leftrightarrow x\varepsilon \emptyset))$

(25) $\neg(Ax)(x\varepsilon a \leftrightarrow x\varepsilon \emptyset) \rightarrow Nec(\neg((Ax)(x\varepsilon a \leftrightarrow x\varepsilon \emptyset)))$

Fra dette følger ved hjelp av Teorem 6.7:

$Nec((Ax)(x\varepsilon a \leftrightarrow x\varepsilon \emptyset) \rightarrow Nec((Ax)(x\varepsilon a \leftrightarrow x\varepsilon \emptyset)))$ Dette og (22.2) impliserer $a=\emptyset$. Fra (22.1), (23) og det at $a=\emptyset$ følger CL(a). Vi har nå vist at CL(a) holder i begge tilfelle. Det følger at $Pos(CL(a)) \rightarrow CL(a)$. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for punkt (b).

Ad (c): Dette punkt følger umiddelbart fra punkt (b) ved hjelp av Teorem 6.7

Ad (d): (I) Vi viser først den første halvdelen av punkt(d), med andre ord at $Tr(a) \rightarrow Nec(Tr(a))$. Anta (1) Tr(a). Fra dette og definisjonen av Tr følger :

(2) CL(a)

(3) $(Ax)(x\varepsilon a \rightarrow Set(x))$

(4) $(Ay)(Ax)(x\varepsilon y \,\&\, y\varepsilon a \rightarrow x\varepsilon a)$

Fra (2) har man (5) Nec(CL(a)) ved hjelp av punkt (b). Videre har man fra (2), i kraft av definisjonen av CL, at Det(a) og derfor L-Det(xεa). Videre har vi tidligere vist, se beviset for punkt (b) i Teorem 6.4, at L-Det(Set(x)). Disse to forhold impliserer sammen med Teorem 6.10 at $L\text{-}Det((Ax)(x\varepsilon a \rightarrow Set(x)))$. og derfor:

$(Ax)(x\varepsilon a \rightarrow Set(x)) \rightarrow Nec((Ax)(x\varepsilon a \rightarrow Set(x)))$. Fra dette og (3) har vi

(6) $Nec((Ax)(x\varepsilon a \rightarrow Set(x)))$.

Anta for reduktio ad absurdum at (7) $Pos((Ex)(Ey)(x\varepsilon y \,\&\, y\varepsilon a \,\&\, \neg(x\varepsilon a)))$. Da finnes x,y slik at (8) $Pos(x\varepsilon y \,\&\, y\varepsilon a) \,\&\, Pos(\neg(x\varepsilon a))$. Fra (8) følger (9) $Pos(y\varepsilon a)$. Nå har vi i lys av (2) at $L\text{-}Det(y\varepsilon a)$ og derfor ved hjelp av Teorem 6.7 at $Nec((Ay)(y\varepsilon a \rightarrow Nec(y\varepsilon a)))$. Dette og (9) impliserer (10) $y\varepsilon a$. Fra dette og (3) følger Set(y). Da har vi ved hjelp av definisjonen av Set og Teorem 6.7 at $Nec(x\varepsilon y \rightarrow Nec(x\varepsilon y))$ og derfor ved hjelp av (8) at (11) $x\varepsilon y$. Videre har man, siden Det(a), at $Nec(\neg(x\varepsilon a) \rightarrow Nec(\neg(x\varepsilon a)))$. Dette sammen med den siste konjunkten i (8) impliserer (12) $\neg(x\varepsilon a)$. Fra (10), (11) og (12) følger

$(Ex)(Ey)(x\varepsilon y \,\&\, y\varepsilon a \,\&\, \neg(x\varepsilon a))$. Dette strider mot (4). Derfor holder negasjonen av (7) og vi har (13) $Nec((Ay)(Ax)(x\varepsilon y \,\&\, y\varepsilon a \rightarrow x\varepsilon a))$. (5), (6) og (13) impliserer Nec(Tr(a)). Vi har dermed bevist den første halvdelen av punkt (d).

(II). Vi går over til den andre halvdelen av punkt (d) og skal vise $\neg Tr(a) \rightarrow Nec(\neg Tr(a))$. Det vil da åpenbart være tilstrekkelig å vise $Pos(Tr(a)) \rightarrow Tr(a)$. Anta derfor (1) Pos(Tr(a)). Ved hjelp av definisjonen av Tr(a) følger da:

(2) Pos(CL(a))

(3) $Pos((Ax)(x\varepsilon a \rightarrow Set(x)))$

(4) $Pos((Ax)(Ay)(x\varepsilon y \,\&\, y\varepsilon a \rightarrow x\varepsilon a))$

Fra (2) og den andre halvdelen i punkt (b) følger:

(5) CL(a) og herav ved hjelp av definisjonen av CL at

(6) Det(a). Dette impliserer:

(7) L-Det(xεa)

Vi har tidligere bevist, man kan studere beviset for Teorem 6.4, at følgende holder:

$(Ax)(Set(x) \rightarrow Nec(Set(x))) \,\&\, (Ax)(\neg Set(x) \rightarrow Nec(\neg Set(x)))$

Det følger herav at (8) L-Det(Set(x)). Fra (7) og (8) kan man ved hjelp av Teorem 6.10, konstruksjonsprinsippene for L-bestemte formler, slutte:

$L\text{-}Det((Ax)(x\varepsilon a \rightarrow Set(x)))$.

Men dette og Teorem 6.7 impliserer:

$Nec((Ax)(x\varepsilon a \rightarrow Set(x)) \rightarrow Nec((Ax)(x\varepsilon a \rightarrow Set(x))))$

Dette, sammen med (3), gir oss: (9) $(Ax)(x\varepsilon a \rightarrow Set(x))$

© 2012 Morten Harboe Rognes

Anta for reduktio at: (10) (Ex)(Ey)(xεy & yεa & ¬(xεa))
Da har man at det finnes x,y slik at (11) xεy & yεa & ¬(xεa). Ved hjelp av (6) har vi:
(12) yεa → Nec(yεa) og (13) ¬(xεa) → Nec(¬(xεa)),
og ved hjelp av (9) har vi Set(y). Derfor: (14) xεy → Nec(xεy). Fra (11) - (14) følger: Nec(xεy & yεa & ¬(xεa)). Herav: Nec((Ex)(Ey)(xεy & yεa & ¬(xεa))). Dette strider åpenbart mot (4). Derfor: (15) (Ax)(Ay)(xεy & yεa → xεa).
Fra (5), (9) og (15) følger Tr(a).
Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for punkt (d).
Ad (e): Dette punkt følger umiddelbart fra punkt (d) ved hjelp av Teorem 6.7
Ad (f): Vi skal vise at CL(On). I lys av definisjonen av CL vil det være tilstrekkelig å vise følgende tre ting:
(i) Det(On)
(ii) (Ex)(xεOn)
(iii) On Inkl V;a
Ad (i): Vi må bevise (Ax)(Ord(x) → Nec(Ord(x)) & (¬Ord(x) → Nec(¬Ord(x)). Vi skal vise en litt sterkere påstand, nemlig:
(+) Ord(a) → Nec(Ord(a)) & ¬Ord(a) → Nec(¬Ord(a)).

(I) Vi tar først for oss den første konjunkten i (+). Anta (1) Ord(a). Ved hjelp av Teorem 7.3 er (1) ekvivalent med:
(2) Tr(a) & (Ax)(Ay)(x,yεa → xεy v x=y v yεx)
Fra dette og punkt (d) følger: (3) Nec(Tr(a)). Anta nå for reduktio ad absurdum at
(4) Pos((Ex)(Ey)(x,yεa & ¬xεy & x≠y & ¬yεx)) Da finnes det x,y der:
(5) Pos(x,yεa & ¬xεy & x≠y & ¬yεx)
Fra (2) og definisjonen av Tr følger CL(a). Fra dette følger i sin tur Det(a) og derfor at
(6) Nec((Ax)(xεa → Nec(xεa))). Fra dette og (5) kan man slutte:
(7) x,yεa
Vi har videre fra (5)
(8) Pos(¬xεy) & Pos(x≠y) & Pos(¬yεx)
Fra (7) og det faktum at a er transitiv i følge (2) følger at Set(x) & Set(y). Herav kan vi så i sin tur slutte:
Nec((Az)(¬zεx → Nec(¬zεx)) & Nec((Az)(¬zεy → Nec(¬zεy))
Sammen med (8) kan fra dette slute (9) ¬xεy & ¬yεx. Fra den andre konjunkten i (8) følger ved hjelp av TA6 at (10) x≠y. Fra (7), (9) og (10) følger
(Ex)(Ey)(x,yεa & ¬xεy & x≠y & ¬yεx). Dette strider åpenbart mot den andre konjunkten i (2). Vi har derfor (11) Nec((Ax)(Ay)(x,yεa → xεy v x=y v yεx)). Fra (3) og (11) følger ved hjelp av Teorem 7.3 at Nec(Ord(a)).

(II) Vi går nå over til å gi et bevis for den andre konjunkten i (+). Vi må vise ¬Ord(a) → Nec(¬Ord(a)). Anta for reduktio ad absurdum at (1) ¬Ord(a) & Pos(Ord(a)). Fra dette følger ved hjelp av Teorem 7.3:
(2) Tr(a) → ¬(Ax)(Ay)(x,yεa → xεy v x=y v yεx) og videre:
(3) Pos(Tr(a) & (Ax)(Ay)(x,yεa → xεy v x=y v yεx))
Fra (3) følger Pos(Tr(a)). Fra dette kan man ved hjelp av den andre konjunkten i punkt (d), som vi nå har bevist, slutte at (4) Tr(a). Dette og (2) impliserer at det finnes x,y der man har (5) x,yεa & ¬xεy & x≠y & ¬yεx. Siden Tr(a) har vi at CL(a) og derfor at Det(a). Fra dette og den første konjunkten i (5) følger (6) Nec(x,yεa). Videre har vi fra det at Tr(a) at (Az)(zεa→ Set(z)). Dette og den første konjunkten i (5) impliserer Set(x) & Set(y) og derfor

© 2012 Morten Harboe Rognes

(Az)(¬zεx → Nec(¬zεx)) & (Az)(¬zεy → Nec(¬zεy))
Herav følger ved hjelp av (5) og TA6 at (7) Nec(¬xεy & x≠y & ¬yεx). Dette sammen med (6) impliserer Nec(x,yεa & ¬xεy & x≠y & ¬yεx) som strider mot (3).

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for at (+) holder.

Ad (ii): Vi har Det(ø) & ø=ø & ¬(Ex)(xεø). I lys av definisjonen av CL impliserer dette:

(1) CL(ø). Videre har vi trivielt:
(2) (Ax)(xεø → Set(x))
(3) (Ax)(Ay)(x,yεø → xεy v x=y v yεx) og endelig:
(4) (Ax)(Ay)(xεy & yεø → xεø)

Påstandene (2) - (4) er alle sanne fordi antesedentene er åpenbart usanne. Ved hjelp ac definisjonen av Ord har vi da Ord(ø) og følgelig øεOn. Da (Ex)(xεOn).

Ad (iii) Vi viste ovenfor, under punkt (a), at: |- (Ax)(Ord(x) → Set(x)) Da følger vedhjelp av definisjonen av Set at |- (Ax)(Ord(x) → At(x)). Herav har vi så ved hjelp av nødvendighetsregelen at |- Nec((Ax)(Ord(x) → At(x))). Det følger at On Inkl V;a

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for punkt (f), og følgelig også et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Mengden av ordinaltall tilfredstiller de krav som stilles til et ordinaltall. Dette er innholdet i den følgende sats:

Teorem 7.11 Ord(On)

Bevis: Ved hjelp av Teorem 7.3 har vi:

Ord(On) ↔. Tr(On) & (Ax)(Ay)(x,yεOn → xεy v x=y v yεx)
↔ (1.1) CL(On)
(1.2) (Ax)(xεOn → Set(x))
(1.3) (Ax)(Ay)(xεy & yεOn → xεOn)
(1.4) (Ax)(Ay)(x,yεOn → xεy v x=y v yεx)

For å vise at satsen holder er det altså tilstrekkelig å bevise (1.1) - (1.4).

Ad (1.1): Dette er en direkte følge av Teorem 7.10, punkt (f).

Ad (1.2): Anta xεOn. Da følger Ord(x) og derfor etter definisjonen av Ord at Tr(x). Fra dette følger i sin tur i lys av definisjonen av Tr at (2) CL(x), og derfor derfor Det(x) som innebærer at (3) (Ay)(yεx → Nec(yεx)) & (Ay)(¬yεx → Nec(¬yεx)). Fra dette kan vi ikke umiddelbart slutte Set(x). Vi må først vise at At(x). I lys av (2) skiller vi mellom to tilfeller: Tilfelle (i): (Ey)(yex). Da følger At(x) ved hjelp av TA10. Tilfelle (ii): ¬(Ey)(yεx). I lys av definisjonen av CL og (2) har vi da, siden Det(x) at x=ø. Men da følger At(x) siden At(ø). I begge tilfelle har vi at At(x). Sammen med (3) impliserer dette Set(x).

Ad (1.3): Anta for vilkårlige x, y at xεy & yεOn. Da følger Ord(y) & xεy. Ved hjelp av Teorem 7.7 kan man da slutte Ord(x), med andre ord at xεOn

Ad (1.4): Dette følger umiddelbart fra Teorem 7.9. **QED**.

Bemerkning: Man bør notere at vi i beviset for Teorem 7.11 har benyttet Teorem 7.3. I beviset for denne siste satsen benyttet vi oss av Fundierungsaksiomet. Det skulle imidlertid være mulig å bevise Teorem 7.11 uten å benytte dette aksiomet. Dette er av betydning om man ønsker å vise at Fundierungsaksiomet er uavhengig av de andre aksiomene og om man er interessert i å vise at det er konsistent relativt til de andre aksiomene. Man kan i denne

© 2012 Morten Harboe Rognes

forbindelse konsultere Takeuti og Zaring [1], side 34 og side 130.

Teorem 7.12 $\neg(Ey)(At(y) \& y= On)$

Man ser fra Teorem 7.12 at egenskapen å være et ordinaltall ikke finnes. Mengden av ordinaltall finnes altså ikke på noe nivå i det rene kumulative egenskapshierarki.

Bevis: Anta for reduktio ad absurdum at det finnes y slik at (1) At(y) & y=On. Da har man ved hjelp av definisjonen av On at (2) $y = \{x: Ord(x)\}$. Fra dette og reglene for eliminasjon av mengdeabstrakter følger $y= \lambda x(Ord(x))$ og derfor $Nec(y= \lambda x(Ord(x)))$. Herav i (3) Nec(y=On). Den foregående sats sier at (4) Ord(On). Fra (3) og (4) følger ved hjelp av Teorem 6.2 at Ord(y). Fra dette og (2) følger $y \varepsilon y$. Dette strider imidlertid mot Teorem 7.6 siden E Fr V;a. **QED**.

Teorem 7.13 $Ord(a) \rightarrow a \varepsilon On \vee a=On$

Bevis: Teorem 7.11 sier at (1) Ord(On). Anta (2) Ord(a). Fra dette (1) og Teorem 7.9 følger

(3) $On \varepsilon a \vee a \varepsilon On \vee a=On$.

Nå følger imidlertid fra $On \varepsilon a$ at $(Ey)(At(y) \& y=On)$. Man kan i denne forbindelse konsultere reglene for eliminasjon av mengdeabstrakter. Dette er uforenelig med det som hevdes i Teorem 7.12. Det følger at $\neg(On \in a)$. Fra dette og (3) følger $a \varepsilon On \vee a=On$. **QED**.

Teorem 7.14 $Ord(a) \rightarrow a \text{ Inkl } On$

Bevis: Vi har ved hjelp av Teorem 7.7 at $\vdash Ord(a) \& x \varepsilon a \rightarrow x \varepsilon On$. Da følger

$\vdash Ord(a) \rightarrow (Ax)(x \varepsilon a \rightarrow x \varepsilon On)$. Ved hjelp av nødvendighetsregelen kan man herav slutte $\vdash Nec(Ord(a)) \rightarrow Nec((Ax)(x \varepsilon a \rightarrow x \varepsilon On))$. Herav følger

(1) $\vdash Nec(Ord(a)) \rightarrow a \text{ Inkl } On$.

I beviset for Teorem 7.10f bevise vi påstanden (+) $Ord(a) \rightarrow Nec(Ord(a))$. Satsen følger fra dette og (1). **QED**.

Vi skal i det følgende bruke α,β,γ , eventuelt med apostroffer og indekser, som variabler som tar ordinaltall som verdier. Vi definerer:

Definisjon 7.5

(a) $(A\alpha)F(\alpha) \leftrightarrow (Ax)(Ord(x) \rightarrow F(x))$

(b) $(E\beta)F(\beta) \leftrightarrow (Ey)(Ord(y) \& F(y))$

(c) $F(\alpha) \leftrightarrow Ord(x) \& F(x)$

Vi definerer relasjonene 'mindre enn', 'mindre eller lik' og 'max' mellom ordinall tall på den følgende måte:

Definisjon 7.6

(a) $\alpha < \beta \leftrightarrow \alpha \varepsilon \beta$

(b) $\alpha =< \beta \leftrightarrow \alpha=\beta \vee \alpha < \beta$

(c) $Max(\alpha,\beta) \leftrightarrow \alpha U \beta$

De neste teoremene, Teorem 7.15 og Teorem 7.16 representerer våre versjoner av prinsippet

© 2012 Morten Harboe Rognes

om transfinit induksjon:

Teorem 7.15 (Transfinit induksjon I)
a Inkl;e On & (Aα)(α Inkl;e a → αεa) → a =;e On

Bevis: Anta (1) a Inkl;e On & (Aα)(α Inkl;e a → αεa). Anta dessuten, for reduktio ad absurdum at (2) (On - a)≠ø . Siden man har (On - a) Inkl On og dessuten, ifølge Teorem 7.11, at Ord(On) følger det ved hjelp av Teorem 7.4 at det finnes α slik at
(3) αε(On - a) & (On-a)Ωα =ø. Siden α εOn har vi ved hjelp av Teorem 7.14 at
(4) α Inkl On. Fra den andre konjunkten i (3) følger
¬(Ex)(xε(On - a) & xεα), med andre ord at
(Ax)(xεOn → (xεα → xεa)). Fra dette og (4) følger (Ax)(xεα → xεa). Da α Inkl;e a. Fra dette og (1) har vi αεa. Dette strider mot (3). Vi har derfor at (2) er usann og derfor (On -a)=ø. Det følger at ¬(Ex)(xεOn & ¬xεa). Herav: (5) On Inkl;e a. Fra (1) følger a Inkl;e On. Dette og (5) impliserer a =;e On. **QED**.

Den følgende sats kan oppfattes som en relativt triviell reformulering av Teorem 7.15.

Teorem 7.16 (Transfinit induksjon II)
(Ax)(xεa → xεOn) & (Aα)((Aβ)(β<α → βεa) → αεa) → (Aα)(αεa)

Bevis: Anta (1) (Ax)(xεa → xεOn) & (Aα)((Aβ)(β<α → βεa) → αεa) . Da har man (2) a Inkl;e On & (Aα)(α Inkl;e a → αεa). Fra dette og Teorem 7.15 følger a =;e On. Men da har man (Ax)(xεOn → xεa) som er ekvivalent med ifølge Definisjon 7.5 at (Aα)(αεa). **QED**.

Den følgende sats viser at dersom a er en klasse eller bestemt og a dessuten er inkludert i On så er unionen av a et ordinaltall.

Teorem 7.17 (i) a Inkl On & CL(a) → Ord(UN(a))
(ii) a Inkl On & Det(a) → Ord(UN(a))

Bevis: Ad (i): Anta (1) a Inkl On & CL(a). Vi skal vise at Ord(UN(a)). I lys av definisjonen av Ord, Definisjon 7.3, er det da tilstrekkelig å vise at (2) Tr(UN(a)) & E We UN(a). Vi skal vise følgende:
(3.1) Tr(UN(a)
(3.2) UN(a) Inkl On
(3.3) E Fr a & b Inkl a → E Fr b
(3.4) E Fr On
Vi skal først vise hvordan (3.1) - (3.4) impliserer (2). Det vil da åpenbart være nok å vise at (3.2) - (3.4) impliserer E We UN(a). Nå har vi ved hjelp av Teorem 7.3 og Teorem 7.11
(4.1) (Ax)(Ay)(x,yεOn → xεy v x=y v yεx). Fra dette og (3.2) følger
(4.2) (Ax)(Ay)(x,yεUN(a) → xεy v x=y v yεx) For å vise at E We UN(a) er det imidlertid også nødvendig å vise at
(4.3) E Fr UN(a).
Fra (3.3) følger:
E Fr On & UN(a) Inkl On → E Fr UN(a).

© 2012 Morten Harboe Rognes

Fra dette (3.2) og (3.4) følger så (4.3). Fra (3.1), (4.2) og (4.3) følger (2) og herav at Ord(UN(a)). Det er derfor tilstrekkelig å vise at (3.1) - (3.4) holder.

Ad (3.3): Anta (5.1) E Fr a & b Inkl a. Ved hjelp av definisjonen av Fr følger fra den første konjunkten i (5.1):

(5.2) (Ax)(x Inkl;e a & x≠ø & At(x) → (Ey)(yεx & xΩR;-1"{y}=ø)). Fra dette, den andre konjunkten i (5.1) og definisjonen av Fr følger så E Fr b.

Ad (3.4): For å vise dette, anta for vilkårlig x at
(6.1) x≠ø & x Inkl;e On & At(x). Da har vi (6.2) (Ey)(yεx) & At(x). Nå sier TA24 at

(6.3) (Ax)(At(x) &(Ey)(yεx) → (Ez)(zεx & ¬(Ew)(wεz & wεx)))

Fra (6.2) og (6.3) følger for noe z: (6.4) zεx & ¬(Ew)(wεz & wεx). Nå har vi wεE;-1"{z} = wεz. Fra (6.4) følger derfor: zêx & xΩE;-1"{z}=ø. Vi har altså, siden x var vilkårlig element slik at (6.1):

(Ax)(x≠ø & x Inkl;e On & At(x) → (Ez)(zêx & xΩE;-1"{z}=ø))

Fra dette følger (3.4)

Ad (3.1): For å vise Tr(UN(a)) må vi vise at

(i) (Ax)(Ay)(xεy & yεUN(a) → xεUN(a))
(ii) (Ax)(xεUN(a) → Set(x)) og
(iii) CL(UN(a))

Vi viser først at (i) holder: Anta for vilkårlige x,y at (7.1) xεy & yεUN(a). Da finnes det z slik at (7.2) xεy & yεz & zεa. Nå har man ifølge (1) at a Inkl On. Det følger da at (7.3) zεOn. Er w et vilkårlig element der wεz har vi ved hjelp av (7.2) at wεz &zεa og derfor at wεUN(a). Det følger at (7.3) (Aw)(wεz → wεUN(a)). Fra (7.3) har vi Ord(z) som sammen med (7.2) og Teorem 7.7 impliserer at Ord(y). Siden Ord(z) & Ord(y) & yεz har vi ved hjelp av Teorem 7.8 at y Inkl z og derfor siden xεy at xεz. Fra dette og (7.3) følger så xεUN(a). Siden x,y var vilkårlige entiteter som oppfylte (7.1) har vi vist:

(Ax)(Ay)(xεy & yε UN(a) → xεUN(a)). Det følger at (i) holder.

Vi viser dernest at (ii) holder: Anta xεUN(a). Da har vi at det finnes y slik at xεy & yεa. Siden a Inkl On ifølge (1) har vi yεOn og derfor Ord(y). Siden xεy følger ved hjelp av Teorem 7.7 at Ord(x). Men fra dette og Teorem 7.10a følger Set(x). Dette viser at (ii) holder.

Det er naturligvis nødvendig å gi et bevis for (iii): Siden vi skal vise CL(UN(a)) er det tilstrekkelig å bevise:

(8.1) Det(UN(a)) & (Ex)(xεUN(a)) & UN(a) Inkl V;a. v.
Det(UN(a)) & ¬(Ex)(xεUN(a)) & UN(a)=ø.

Vi skal først vise at (+) Det(UN(a)) Fra (1) har vi at CL(a). Dette impliserer (8.2) Det(a). Anta xεUN(a) for vilkårlig x. Da følger det at det finnes y slik at (8.3) xεy & yεa. Siden a Inkl On ifølge (1) følger det at Ord(y) og derfor at Set(y) ifølge Teorem 7.10. Dette og (8.3) impliserer Nec(xεy). Fra (8.2) og (8.3) følger Nec(yεa). Vi har da at Nec(xεy&yεa) og derfor Nec((Ey)(xεy & yεa)). Herav Nec(xεUN(a)). Siden x var vilkårlig har vi (8.4) (Ax)(xεUN(a) → Nec(xεUN(a)))

For å vise at (+) holder er det også nødvendig å vise (Ax)(¬(xεUN(a)) → Nec(¬xεUN(a))). Anta derfor at (8.5) Pos(xεUN(a)). Da følger

© 2012 Morten Harboe Rognes

Pos((Ey)(xεy & yεa)) og herav ved hjelp av TA4, Barcan-formelen, at det finnes y slik at Pos(xεy& yεa). Fra dette følger (8.6) Pos(xεy) & Pos(yεa). Siden Det(a) ifølge (8.2) har vi Nec((Ax)(xεa → Nec(xεa))). Fra dette og (8.6) følger Pos(Nec(yεa)) og derfor (8.7) yεa. (Ved hjelp av TA2 og TA3). Siden yεa og a Inkl On ifølge (1) har vi at yεOn og derfor (8.8) Set(y) ifølge Teorem 7.10a. Fra (8.8) kan man slutte at Nec((Ax)(xεy →Nec(xεy))). Dette og (8.6) impliserer xεy. Vi har derfor xεy & yεa og følgelig xεUN(a). Dette viser at (+) holder.

Det skulle være åpenbart at (8.9) UN(a) Inkl V;a.

Vi skiller nå mellom to tilfeller:

Tilfelle (i): (Ex)(xεUN(a)). Da følger det at (8.1) holder i lys av (+) og (8.9).

Tilfelle (ii) ¬(Ex)(xεUN(a)). Da har man ¬(Ex)(Ey)(xεy & yεa). Det følger da at (8.10) Nec(¬(Ex)(Ey)(xεy & yεa)). For var det motsatte tilfelle ville vi ha Pos((Ex)(xεUN(a))). Herav ville man så kunne utlede på samme måte som ovenfor at (Ex)(xεUN(a)) som er umulig. Fra (8.10) følger Nec((Ax)(xεUN(a) ↔ xεø)) og herav kan man slutte UN(a)=ø. Fra dette, Det(UN(a)) følger det at (8.1) holder.

Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for (3.1)

Ad (3.2): Anta xεUN(a). Da xεy & yεa for noe y. Siden a Inkl On følger det at yεOn og derfor Ord(y). Fra dette og det at xεy har man Ord(x) ved hjelp av Teorem 7.7. Men da xεOn. Dette viser at (3.2) holder.

Ad (ii): Dette bevises på samme måte. Man ser imidlertid fra den siste delen av beviset, der vi viser at CL(UN(a)) at forutsetningen CL(a) er unødvendig sterk. Vi trenger bare å forutsette Det(a).

Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Teorem 7.18 Det(a) & a Inkl On & αεa → α =< UN(a)

Bevis: Anta (1) Det(a) & a Inkl On og (2) αεa. Fra (1) følger ved hjelp av Teorem 7.17 at (3) Ord(UN(a)). Anta for vilkårlig x at xεα. Da har vi ved hjelp av (2) at xεαεa. Det følger at xεUN(a). Vi har altså: (4) (Ax)(xεα → xεUN(a)). Siden Ord(UN(a)) har vi Tr(UN(a)) og derfor (5) Det(UN(a)). Vi har fra (1) og (2) at αεOn, og derfor også at Det(α). Dette, (5), (4) og Teorem 6.10 impliserer Nec((Ax)(xεα → xεUN(a))) og derfor (6) α Inkl UN(a). Herav følger α SInkl UN(a) v α=UN(a).

Tilfelle (i): α SInkl UN(a). Siden Ord(UN(a)) & Ord(α) følger da ved hjelp av Teorem 7.8b at αεUN(a). Da har vi α<UN(a) og følgelig α =<UN(a). Satsen holder derfor i dette tilfellet.

Tilfelle (ii): α=UN(a). Da har man trivielt at α =<UN(a). Satsen holder derfor i begge tilfelle. **QED**.

Teorem 7.19 CL(a) & a Inkl On & (Aβ)(βεa → β=<α) → UN(a) =< α

Bevis: Anta (1) CL(a) & a Inkl On. Anta videre (2) (Aβ)(βεa → β=<α) . Anta for vilkårlig β at βεUN(a). Da har vi at det finnes γ slik at βεγ & γεa. Fra dette og (2) følger γ =< α. Dette innebærer at γεα v γ=α. Har vi at γ=α følger, siden, βεγ at βεα. Har vi γεα følger det at βεγ & γεα. Siden Ord(α) har vi Tr(α) og derfor βεα. I begge tilffelle har vi βεα. Siden β var et vilkårlig element i UN(a) kan vi konkludere med at

© 2012 Morten Harboe Rognes

(3) $(A\beta)(\beta\varepsilon UN(a) \rightarrow \beta\varepsilon\alpha)$. Siden Ord(α) har vi Tr(α) og derfor (4) Det(α). Fra (1) og Teorem 7.17 følger Ord(UN(a)) og derfor Tr(UN(a)) og derfor (5) Det(UN(a)). Fra (3), (4), (5) og Teorem 6.10 kan vi slutte at $Nec((A\beta)(\beta\varepsilon UN(a) \rightarrow \beta\varepsilon\alpha))$, med andre ord at

(6) UN(a) Inkl α. Herav følger UN(a) SInkl α v α=UN(a).

Tilfelle (i): UN(a) SInkl α. Siden Ord(UN(a)) & Ord(α) følger da ved hjelp av Teorem 7.8b at $UN(a)\varepsilon\alpha$. Da har vi UN(a)<α og følgelig
UN(a) =<α. Satsen holder derfor i dette tilfellet.

Tilfelle (ii): α=UN(a). Da har man trivielt at UN(a) =<α.
Satsen holder derfor i begge tilfelle. **QED**.

Etterfølgeren til et ordinaltall α, nemlig α+1, er definert slik:

Definisjon 7.7 $\alpha+1 = \alpha U\{\alpha\}$

Ethvert ordinaltall er både et element i det ordinaltallet som følger umiddelbart etter og inkludert i det. Dette er innholdet i den følgende sats:

Teorem 7.20 $(A\alpha)(\alpha\varepsilon(\alpha+1)$ & α Inkl α+1)

Bevis: Man har $\alpha\varepsilon\{\alpha\}$ Inkl $\alpha U\{\alpha\}$. Dette viser at $\alpha\varepsilon(\alpha+1)$. Videre har man at
α Inkl $\alpha U\{\alpha\}=\alpha+1$. **QED**.

Er α et ordinaltall er α+1 det også:

Teorem 7.21 $(A\alpha)(\alpha+1\ \varepsilon\ On)$

Bevis: Anta (1) αεOn. Vis ønsker å vise at (α+1)εOn. Dette innebærer i lys av Definisjon 7.7 at vi må vise at $\alpha U\{\alpha\}\varepsilon On$. Fra (1) følger ved hjelp av Teorem 7.14 at (2) α Inkl On. Siden αεOn har vi {α} Inkl On. Fra dette og (2) følger da (3) $\alpha U\{\alpha\}$ Inkl On. Fra dette følger (4) $\alpha U\{\alpha\}$ SInkl On v $\alpha U\{\alpha\} = On$. Anta for reduktio ad absurdum at (5) $\alpha U\{\alpha\} = On$ Siden Ord(α) ifølge (1) har vi ved hjelp av Teorem 7.10 at Set(α). Fra dette følger ved hjelp av Teorem 6.1 og Teorem 6.4 at (6) $Set(\alpha U\{\alpha\})$. Dette impliserer: (7) $Det(\alpha U\{\alpha\})$. Videre har vi ifølge Teorem 7.10f at CL(On) og derfor: (8) Det(On). Fra (6) følger at $At(\alpha U\{\alpha\})$ og derfor at det det finnes y slik at

(9) At(y) & $y=\alpha U\{\alpha\}$.

Fra (5) følger $(Ax)(x\varepsilon\alpha U\{\alpha\} \leftrightarrow x\varepsilon On)$. Fra dette følger så ved hjelp av (7) og (8) og Teorem 6.10 at $Nec((Ax)(x\varepsilon(\alpha U\{\alpha\}) \leftrightarrow x\varepsilon On))$. Men dette og (9) impliserer At(y) & y=On, som er umulig ifølge Teorem 7.12. (5) er altså usann og vi har derfor i lys av (4) at

(10) $\alpha U\{\alpha\}$ SInkl On

Det vil nå være tilstrekkelig å vise (11) $Tr(\alpha U\{\alpha\})$ siden dette, det forhold at Ord(On) og Teorem 7.8 impliserer $\alpha+1 = \alpha U\{\alpha\}\varepsilon On$. La oss derfor vise (11).

Vi viser viser først at

(12) $(Ax)(Ay)(x\varepsilon y$ & $y\varepsilon\alpha U\{\alpha\} \rightarrow x\varepsilon\alpha U\{\alpha\})$

Anta $x\varepsilon y$ & $y\varepsilon\alpha U\{\alpha\}$. Da har vi $y\varepsilon\alpha$ v y=α. I det første tilfelle har vi $x\varepsilon y$ & $y\varepsilon\alpha$. Men siden αεOn har vi Tr(α) og derfor at $x\varepsilon\alpha$. Dette impliserer at $x\varepsilon\alpha U\{\alpha\}$. I det andre tilfellet har vi $x\varepsilon y=\alpha$ og derfor $x\varepsilon\alpha U\{\alpha\}$. Dette viser at (12) holder.

Vi må også vise at

(13) $(Ax)(x\varepsilon\alpha U\{\alpha\} \rightarrow Set(x))$

© 2012 Morten Harboe Rognes

Anta xεαU{α}. Da følger ved hjelp av (10) at xεOn. Men herav Set(x) ved hjelp av Teorem 7.10. Dette viser at (13) holder.

Endelig må vi vise at (14) CL(αU{α}). Side Set(αU{α}) ifølge (6) har vi Det(αU{α}) Videre har vi åpenbart , i lys av (13) at αU{α} Inkl V;a. Endelig har vi αεαU{α} og derfor (ex)(xεαU{α}). Dette viser at (14) holder. Fra (12), (13) og (14) følger så (11) ved hjelp av definisjonen av Tr. **QED**.

Den følgende sats sier noe som skulle være temmelig opplagt: Er α et ordinaltall finnes det ikke noe ordinaltall β som ligger mellom α og α+1:

Teorem 7.22 $\neg(\alpha < \beta < \alpha+1)$

Bevis: Anta for reduktio ad absurdum at $\alpha < \beta < \alpha+1$. Da følger $\alpha\varepsilon\beta$ & $\beta\varepsilon(\alpha U\{\alpha\})$ og derfor $\alpha\varepsilon\beta$ & $\beta\varepsilon\alpha$ v $\alpha\varepsilon\alpha$. Men begge dele er utelukket siden α,βεOrd og E Fr V;a. **QED**.

Teorem 7.23 a SInkl On & Set(a) → (Aα)(αεa → α < UN(a)+1)

Bevis: Anta (1) a SInkl On & Set(a) & αεa. Da har man naturligvis Det(a) og derfor ved hjelp av Teorem 7.17 at Ord(UN(a)). Siden αεa følger fra (1) ved hjelp av Teorem 7.18 at α =< UN(a). Herav følger per definisjon av =< at (2) αεUN(a) v α=UN(a). I det første tilfellet har man åpenbart at at αε UN(a)U{UN(a)} = UN(a)+1. og derfor α<(UN(a)+1.
I det andre tilfellet har man UN(a)ε {UN(a)} Inkl UN(a)U{UN(a)} = UN(a)+1 og derfor UN(a) < UN(a)+1. **QED**.

§8 Transfinit rekursjon og definisjoner ved transfinit rekursjon

Hovedhensikten med denne paragrafen er å vis enoen viktige satser om transfinit rekursjon og definisjoner ved transfinit rekursjon. De sentrale teoremene i denne forbindelse er Teorem 8.14, som vi kaller rekursjonsteoremet, og Teorem 8.19. Ved hjelp av det sistnevnte teorem kan man rettferdiggjøre de definisjoner vi gir av det rene kumulative egenskapshierarki og det rene kumulative mengdehierarki.

I den siste halvdelen av denne paragrafen beskjeftiger vi oss med satser som kaster lys over de mer grunnleggende egenskapene til disse to hierarkiene.

Før vi tar for oss rekursjonsteoremet, Teorem 8.14 er det imidlertid hensiktsmessig å vise endel preliminære satser.

Det følgende teorem viser at dersom G er bestemt og er en relasjon som relaterer mengder til mengder så er betingelsen <x,y>εG L-bestemt:

Teorem 8.1 Det(G) & G Inkl {x: Set(x)}^2 →
(Ax)(Ay)(<x,y>εG → Nec(<x,y>εG)) &
(Ax)(Ay)(¬(<x,y>εG) → Nec(¬(<x,y>εG)))

Bevis: (a) Fra den første forutsetningen følger: (1) (Ax)(xεG → Nec(xεG). Anta (2) <x,y>εG. Fra dette har vi ved hjelp av de kontekstuelle definisjonene av mengdeabstrakter at det må finnes z slik at (3) At(z) & z= <x,y> & zεG. Fra dette og (1) følger (4) Nec(zεG). Videre må vi fra (3), i lys av TA14, ha (5) Nec(z=<x,y>). Fra (4) og (5) følger

© 2012 Morten Harboe Rognes

Nec(<x,y>εG).

(b) Anta (6) ¬(<x,y>εG). Da har vi ved hjelp av Definisjon 4.1.1 (7) ¬((Ez)(At(z) & z= <x,y> & zεG)). Dette innebærer at

(8) (Az)(At(z) & z= <x,y> → ¬(zεG)). Fra forutsetningen om Det(G) følger (9) (Ax)(¬(xεG) → Nec(¬(xεG))). Det følger at

(10) (Az)(At(z) & z= <x,y> → Nec(¬(zεG))). Nå har vi

(11) (Az)(At(z) & z= <x,y> → Nec(z= <x,y>)). Videre har vi ved hjelp av Teorem 6.3 (Ez)(At(z) & z= <x,y>) . Fra dette, (10) og (11) følger Nec(¬(<x,y>εG)). **QED**.

Det neste teoremet viser at dersom G er bestemt, og dessuten en relasjon mellom mengder, har vi at dersom G entydig tilordner y til entiteten x så har man at y=G(x) og at y er en mengde. Hvis G derimot ikke tilordner entydig noe objekt til x så er G(x) identisk med nullmengden:

Teorem 8.2 (a) Det(G) & G Inkl {x: Set(x)}^2 →
(Az)(<x,z>εG ↔ z=y) → (G(x)=y & Set(y))
(b) Det(G) & G Inkl {x: Set(x)}^2 →
¬(Ey)((Az)(<x,z>ε ↔ z=y)) ↔ (G(x)=ø & Set(G(x)))

Bevis: *Ad (a)*: Anta (1) Det(G) & G Inkl {x: Set(x)}^2 . Anta videre at (2) (Az)(<x,z>εG ↔ z=y). Fra (2) kan man slutte: <x,y>εG. Fra dette og den andre konjunkten i (1) følger: (3) Set(y). Vi ønsker nå å bevise:

(4) Nec((As)((Ep)(sεp & (Az)(<x,z>εG ↔ z=p)) ↔ sεy))

Anta for reduktio ad absurdum at (4) ikke holder. Da har vi

(5) Pos((Es)(¬((Ep)(sεp & (Az)(<x,z>εG ↔ z=p)) ↔ sεy))))

Dette innebærer at for noe s:

(6) Pos(¬((Ep)(sεp & (Az)(<x,z>εG ↔ z=p)) ↔ sεy)))

Fra dette følger:

(7) Pos((Ep)(sεp & (Az)(<x,z>εG ↔ z=p)) & ¬(sεy)) v
Pos(sεy & ¬((Ep)(sεp & (Az)(<x,z>εG ↔ z=p))))

Tilfelle (i): Pos((Ep)(sεp & (Az)(<x,z>εG ↔ z=p)) v ¬(sεy)). Da finnes det p slik at (8) Pos((sεp & (Az)(<x,z>εG ↔ z=p)) & ¬(sεy)) Nå har man

(9) <x,y>εG → sεp & (Az)(<x,z>εG ↔ z=p) → sεp

Siden dette er et teorem har vi:

(10) Nec(<x,y>εG → sεp & (Az)(<x,z>εG ↔ z=p) → sεp)

Fra (1) ovenfor følger: <x,y>εG → Nec(<x,y>εG). Siden vi har <x,y>εG følger derfor Nec(<x,y>εG). Sammen med (10) impliserer dette Nec(sεp & (Az)(<x,z>εG ↔ z=p) → sεp) Dette strider mot (8). Dette tilfellet er derfor utelukket.

Tilfelle (ii): (+) Pos(sεy & ¬((Ep)(sεp & (Az)(<x,z>εG ↔ z=p)))). Nå har vi

(11) sεy & (Az)(<x,z>εG ↔ z=y) → (Ep)(sεp & (Az)(<x,z>εG ↔ z=p))

Siden Det(G) har vi L-Det(<x,z>εG). Videre har vi L-Det(z=y). Fra dette og Teorem 6.10 følger L-Det((Az)(<x,z>εG ↔ z=y)). Dette og (2) impliserer

(12) Nec((Az)(<x,z>εG ↔ z=y)). Fra (11) følger:

(13) Nec((Az)(<x,z>εG ↔ z=y) → sεy→(Ep)(sεp & (Az)(<x,z>εG ↔ z=p))).

Fra (12) og (13) kan man slutte: (14) Nec(sεy→(Ep)(sεp & (Az)(<x,z>εG ↔ z=p))). Dette strider åpenbart mot (+). Også dette tilfellet er derfor utelukket.

Siden vi kan utlede en motsigelse i begge tilfelle følger det at (5) er usann og (4) holder. Fra (3), (4) og TA15 følger

© 2012 Morten Harboe Rognes

Set(y) & y=λs((Ep)(sεp & (Az)(<x,z>εG ↔ z=p))). Herav følger ved hjelp av definisjonen av G(x) at Set(y) & y= G(x).

Ad (b): Fra det at Det(G) følger
(14.1) (Ax)(Ay)(<x,y>εG → Nec(<x,y>εG)) og
(14.2) (Ax)(Ay)(¬<x,y>εG → Nec(¬<x,y>εG))
Herav har man (15) L-Det(<x,y>εG). Fra dette og det faktum at L-Det(z=y) følger ved hjelp av Teorem 6.10 at L-Det(¬((Ey)(Az)(<x,z>εG ↔ z=y))). Fra dette og forutsetningen i punkt (b) følger Nec(¬((Ey)(Az)(<x,z>εG ↔ z=y))). Herav følger videre:
(16) Nec(¬(Ew)(Ey)(wεy & (Az)(<x,z>εG ↔ z=y)))
Sett per definisjon H(w) = (Ey)(wεy & (Az)(<x,z>εG ↔ z=y)).
Da har man
(17) Nec(¬(Ew)H(w)) ie
(17.1) Nec((Aw)(H(w) ↔ w≠w)) som er ekvivalent med
(17.2) Nec((Aw)(H(w) ↔ wεø)
Ved hjelp av nullmengdeaksiomet kan man slutte at det finnes y slik at
(18) At(y) & Nec((Aw)(wεy ↔ w≠w))
Fra dette og (17.2) følger: (19) At(y) & Nec((Aw)(wεy ↔ H(w)). Fra dette kan man ved hjelp av TA15 slutte y=λw(H(w)) og derfor y=G(x). Men vi har også y=ø og derfor Set(y). Det følger at G(x)=ø & Set(G(x)). **QED**.

Er G bestemt og en relasjon mellom mengder har man at x=G(y) er L-bestemt. Dette er innholdet i det følgende teorem:

Teorem 8.3 Det(G) & G Inkl {x: Set(x)}^2 →
(x=G(y) → Nec(x=G(y))) & (x≠G(y) → Nec(x≠G(y))

Bevis: Anta (1) Det(G) & G Inkl {x: Set(x)}^2 . Fra dette og Teorem 8.3 kan man slutte (2) Set(G(y)). Da (3) z=G(y) for noe z Nå har man ikraft av av TA6:
(3.1) x=z → Nec(x=z)
(3.2) x≠z → Nec(x≠z)
Fra (2), (3.1) og (3.2) følger konsekventen i Teorem 8.3 ved hjelp av Teorem 6.2c. **QED**.

Den følgende definisjon introduserer predikatet "f Fn;m y" som leses " f er en funksjon der domenet er y og som avbilder mengder på mengder". Vi skal også tillate oss å lese dette uttrykket slik: "f er en mengdefunksjon over y". Definisjonen er:

Definisjon 8.1 (a) f Fn;m y ↔ f Fn y & f Inkl {x: Set(x)}^2
(b) A Fn;m B ↔ A Fn B & A Inkl {x: Set(x)}^2

f Fn;m y innebærer at følgende: For det første at f er en funksjon der domenet er y. For det andre at domenet til f og verdiområdet til f kun inneholder mengder. Man bør merke seg at f Fn;m y ikke uten videre impliserer at f er en mengde.

Teorem 8.4 Set(f) & Set(x) & f Fn;m x & yεDom(f) → At(f(y))

Bevis: Fra den tredje forutsetningen i satsen og Definisjon 8.1 følger

© 2012 Morten Harboe Rognes

(1) f Inkl {x: Set(x)}^2. Fra den første forutsetningen, Set(f) følger at
(2) Det(f). Fra (1), (2) og og Teorem 8.2 følger Set(f(y)). Men fra dette og definisjonen av Set kan man slutte At(f(y)). **QED**.

Vårt neste teorem viser at dersom x,y er mengder har man at det nødvendigvis er slik at x Fn;m y om man har x Fn;m y, og det nødvendigvis er slik at ¬(x Fn;m y) om det ikke er slik at x Fn;m y :

Teorem 8.5 (a) Set(x) & Set(y) →. x Fn;m y → Nec(x Fn;m y)
(b) Set(x) & Set(y) →. ¬(x Fn;m y) → Nec(¬(x Fn;m y))

Bevis: *Ad (a)*: Anta (1) Set(x) & Set(y). Anta dessuten at (2) x Fn;m y. Fra (2) og definisjonen av Fn;m følger:

(3) x Inkl {z: Set(z)}^2.
(4) Dom(x) = y
(5) (Az)(Aw)(Ar)(<z,w>εx & <z,r>εx → w=r)
(6) x Inkl (V;a)^2

Fra (3) kan man slutte: Nec((Ar)(rεx → rε{z: Set(z)}^2.)). Herav følger så:

(7) Nec(x Inkl {z: Set(z)}^2.)

Fra (4) har vi: (8) (Az)((Es)(<z,s>εx) ↔ zεy). Siden Set(x) & Set(y) er tilfelle ifølge (1) kan man slutte at

(9) L-Det(<z,s>εx & y=y) og dessuten tilsvarende at
(10) L-Det(z=z & s=s & zεy). Ved av Teorem 6.10 kan man derfor slutte:
(11) L-Det((Az)((Es)(<z,s>εx) ↔ zεy))

Dette og (8) impliserer:

(12) Nec((Az)((Es)(<z,s>εx) ↔ zεy))

På en helt analog måte kan man ved hjelp av(8), forutsetningen om at Set(x) og Teorem 6.10 utlede at:

(13) Nec((Az)(Aw)(Ar)(<z,w>εx & <z,r>εx → w=r)) og
(14) Nec(x Inkl (V;a)^2)

Fra (7), (12), (13) og (14) følger Nec(x Fn;m y)

Ad (b): Anta (0) Set(x) & Set(y) og anta dessuten for reduktio ad absurdum
(1) ¬(x Fn;m y) og (2) Pos(x Fn;m y)

Fra (2) og definisjonen av Fn;m følger:

(3) Pos(x Inkl {z: Set(z)}^2)
(4) Pos(Dom(x) = y)
(5) Pos((Az)(Aw)(Ar)(<z,w>εx & <z,r>εx → w=r))
(6) Pos(x Inkl (V;a)^2)

Nå har man Nec(x Inkl {z: Set(z)}^2 → Nec(x Inkl {z: Set(z)}^2)) og dessuten likeledes Nec(x Inkl (V;a)^2 → Nec(x Inkl (V;a)^2)). Fra disse to setningene, (3) og (6) kan man, fordi man har at Pos(p) & Nec(p→Nec(p)) impliserer Pos(Nec(p)) og dermed p, slutte at

(7) x Inkl {z: Set(z)}^2 & x Inkl (V;a)^2

Fra (0) følger

(8) L-Det(Dom(x)=y).

Man kan i denne forbindelse konsultere metoden benyttet under punkt (a), samt Teorem 6.10. Fra (8) følger derforNec(Dom(x)=y → Nec(Dom(x)=y)) som sammen med (4) impliserer:

(9) Dom(x)=y

© 2012 Morten Harboe Rognes

På tilsvarende vis innser man at (5) impliserer:

(10) $(Az)(Aw)(Ar)(<z,w>\varepsilon x \ \& \ <z,r>\varepsilon x \rightarrow w=r)$

Fra (7), (9) og (10) samt definisjonen av Fn;m følger x Fn;m y. Men dette strider mot (1). Det følger at punkt (b) i satsen holder. **QED**.

De neste teoremene, Teorem 8.6 - Teorem 8.9, viser at en rekke termer er bestemte.

Teorem 8.6 $Det(G) \ \& \ G \ Inkl \ \{x: Set(x)\}\hat{}2 \rightarrow$
$Det(\{f: (E\beta)(f \ Fn;m \ \beta \ \& \ Set(f) \ \& \ (A\alpha)(\alpha < \beta \rightarrow f(\alpha) = G(Rest(f,\alpha)))))\})$

Bevis: Satsen bevises ved hjelp av de setningene vi har bevist tdligere i denne paragrafen samt ved utstrakt benyttelse av Teorem 6.10.

Anta (1) $Det(G) \ \& \ G \ Inkl \ \{x: Set(x)\}\hat{}2$. Sett per definisjon:

$Q(f) \leftrightarrow (E\beta)(f \ Fn;m \ \beta \ \& \ Set(f) \ \& \ (A\alpha)(\alpha < \beta \rightarrow f(\alpha) = G(Rest(f,\alpha))))$

Det vil være tilstrekkelig å bevise $Q(f) \rightarrow Nec(Q(f))$ og $\neg Q(f) \rightarrow Nec(\neg Q(f))$. Vi gjør det første under punkt (a), det andre bevises under punkt (b).

(a) Anta Q(f). Da finnes det β slik at

(1) f Fn;m β

(2) Set(f)

(3) $(A\alpha)(\alpha< \beta \rightarrow f(\alpha) = G(Rest(f,\alpha)))$

Siden Ord(β) har vi (4) Set(β). Dette, (1) og (2) impliserer ved hjelp av Teorem 8.5 :

(5) Nec(f Fn;m β) Videre kan man fra (2) slutte:

(6) Nec(Set(f))

Anta for reduktio ad absurdum at

(+) $Pos((E\alpha)(\alpha <\beta \ \& \ f(\alpha) \neq G(Rest(f,\alpha)))$

Fra dette følger for noe αεOn:

(++) $Pos(\alpha<\beta) \ \& \ Pos(f(\alpha) \neq G(Rest(f,\alpha)))$

Siden Set(β) har vi i lys av definisjonen av < at $Nec(\alpha<\beta \rightarrow Nec(\alpha<\beta))$[18] og derfor i lys av den første konjunkten i (++) at

(7) $\alpha<\beta$

Videre har man ved hjelp av (1), Teorem 6.7 og Teorem 8.3 at

$Nec((Ax)(Ay)(x\neq G(y) \rightarrow Nec(x\neq G(y))))$ Siden vi har $Set(f(\alpha)) \ \& \ Set(Rest(f,\alpha))$[19] følger: $Nec(f(\alpha) \neq G(Rest(f,\alpha)) \rightarrow Nec(f(\alpha) \neq G(Rest(f,\alpha))))$. Dette og den andre konjunkten i (++) tillater oss å slutte:

(+++) $f(\alpha) \neq G(Rest(f,\alpha))$

Fra (7) og (+++) har vi $(E\alpha)(\alpha<\beta \ \& \ f(\alpha)\neq G(Rest(f,\alpha)))$. Dette strider mot (3). Vi har derfor at negasjonen av (+) holder, med andre ord:

(8) $Nec((A\alpha)(\alpha<\beta \rightarrow f(\alpha)=G(Rest(f,\alpha))))$.

Det følger fra (5),(6) og (8) at $Nec(Q(f))$. Vi har derfor bevist: $Q(f) \rightarrow Nec(Q(f))$.

(b) Anta for reduktio ad absurdum at (1) $\neg Q(f) \ \& \ Pos(Q(f))$. Fra den siste konjunkten følger for noe βεOn:

(2) Pos(f Fn;m β)

(3) Pos(Set(f))

(4) $Pos((A\alpha)(\alpha<\beta \rightarrow f(\alpha)=G(Rest(f,\alpha))))$

18 Vi benytter her stilltiende at Ord(x) er L-bestemt. Se beviset for Teorem 7.10, punkt (f).

19 I beviset for vårt neste teorem, Teorem 8.7, gir viet bevis for at Set(Rest(f,α)) holder under de forutsetninger som er nevnt i denne satsen, ie. Teorem 8.6.

© 2012 Morten Harboe Rognes

Siden Set(f) er L-bestemt har vi Nec(Set(f)→ Nec(Set(f))). Fra dette og (3) følger Set(f). Videre har vi Set(β). Derfor følger fra (2) i lys av Teorem 8.5 og det faktum at Set(f) at

(5) f Fn;m β & Set(f)

Anta for reduktio ad absurdum at (6) (Eα)(α<β & f(α) ≠ G(Rest(f,α))). Da finnes αεOn slik at (7) α<β & f(α) ≠ G(Rest(f,α)). Da har vi (8) Nec(α<β) siden Set(β) og Set(α). Videre har vi f Set(f(α)) & Set(Rest(f,α)). Dette sammen med (7) og Teorem 8.3 impliserer:

(9) Nec(f(α) ≠ G(Rest(f,α))).

Fra (8) og (9) følger derfor Nec((Eα)(α<β & f(α)≠G(Rest(f,α)))) som strider mot (4). Det følger at (10) (Aα)(α<β → f(α)=G(Rest(f,α)))

Fra (5) og (10) følger Q(f). Vi har vist Pos(Q(f)) → Q(f), som er det vi ønsker. **QED**.

Teorem 8.7 Set(f) & f Inkl {x: Set(x)}^2 & Set(y) → Set(Rest(f,y))

Bevis: Vi har (1) Rest(f,y) Inkl f og siden Set(f) at (2) At(f). Fra (1) og (2) og Teorem 6.3h følger det at (3) At(Rest(f,y)). Vi må imidlertid vise at Set(Rest(f,y)) og derfor vise at

(+) (Az)(zεRest(f,y) → Nec(zεRest(f,y)) &
(Az)(¬(zεRest(f,y)) → Nec(¬(Rest(f,y))))

(a) Vi viser først (Az)(zεRest(f,y) → Nec(zεRest(f,y)). Anta derfor for vilkårlig z at (4) zεRest(f,y). Da per Definisjon6.5: zε f Ω(yxV;a). Det følger at det da må finnes w1,w2 slik at

z=<w1,w2> & zεf & w1εy & w2εV;a. Siden f Inkl {x: Set(x)}^2 følger

(5) z=<w1,w2> & zεf & w1εy & w2εV;a

Siden (6) Set(y) & Set(f) følger (7) Nec(zεf). Videre må vi ha (8) Nec(z=<w1,w2>). Siden Set(y) følger: (9) Nec(w1εy). Siden w2εV;a følger ved hjelp av definisjonen av V;a at At(w2). Men herav (10) Nec(At(w2)) ie. (11) Nec(w2εV;a) ved hjelp av TA7. Det følger fra (7), (8), (9) og (11) at Nec(z=<w1,w2> & zεf & w1εy & w2εV;a). Fra dette og definisjonen av Rest kan man slutte Nec(zεRest(f,y)). Dette viser at den første konjunkten i (+) holder.

(b) Anta for vilkårlig z at (12) ¬(zεRest(f,y)). Da har vi

(13) ¬((Ew1)(Ew2)(z=<w1,w2> & zεf & w1εy & At(w2))). Siden det forutsettes at Set(f) & Set(y) har vi at zεf og w1εy er L-bestemte formler. Det samme gjelder formlene z=<w1,w2> og At(w2). Fra dette og Teorem 6.10 følger det at (13) er L-bestemt. Det følger at Nec(¬((Ew1)(Ew2)(z=<w1,w2> & zεf & w1εy & At(w2)))) . Herav har vi så ved hjelp av definisjonen av Rest at Nec(zεRest(f,y)). Dette viser at den andre konjunkten i (+) holder. **QED**.

Teorem 8.8 Det(a) & a Inkl {Set(x)} → Det(Un(a))

Bevis: Anta (1) Det(a) & a Inkl {Set(x)}. Anta (2) xεy & yεa for noe y. Fra to og den andre konjunkten i (1) følger (3) Set(y). Fra dette og (2) følger Nec(xεy). Fra den andre konjunkten i (2) og den første konjunkten i (1) følger: Nec(yεa). Vi har derfor Nec(xεy& yεa), og følgelig Nec((Ey)(xεy&yεa)). herav: Nec(xεUn(a)).

Vi må også vise: (Ax)(¬(xεUn(a)) → Nec(¬(xεUn(a)))). Det vil være nok å vise: Pos(xεUn(a)) → xεUn(a). Anta derfor (4) Pos(xεUn(a)). Fra dette følger:

(5) Pos((Ey)(xεy & yεa)). Man kan fra dette slutte at det må finnes y der (6) Pos(xεy & yεa). Herav følger (7) Pos(xεy) og (8) Pos(yεa). Siden Det(a) følger (yεa → Nec(yεa)) & (¬(yεa) → Nec(¬(yεa))). Fra dette kan man ved hjelp av Teorem 6.7 slutte at Nec(yεa → Nec(yεa)) som sammen med (8) impliserer (9) yεa. Fra dette og (1)

© 2012 Morten Harboe Rognes

følger Set(y). Herav følger så på samme måte sammen med (7) xεy. Vi har derfor xεy & yεa. Følgelig xεUn(a). **QED**.

Definisjon 8.2

(a) $\pi(G) = \{f: (E\beta)(f\ Fn;m\ \beta\ \&\ Set(f)\ \&\ (A\alpha)(\alpha < \beta \rightarrow f(\alpha) = G(Rest(f,\alpha))))\}$

(b) $\xi(G) = UN(\pi(G))$ ie

$\xi(G) = UN(\{f: (E\beta)(f\ Fn;m\ \beta\ \&\ Set(f)\ \&\ (A\alpha)(\alpha < \beta \rightarrow f(\alpha) = G(Rest(f,\alpha))))\})$

Teorem 8.9 $Det(G)\ \&\ G\ Inkl\ \{x: Set(x)\}^2 \rightarrow Det(\xi(G))$

Bevis: Anta (1) $Det(G)\ \&\ G\ Inkl\ \{x: Set(x)\}^2$. Da følger ved hjelp av Teorem 8.6 at (2) $Det(\pi(G))$. Nå har man åpenbart at $\vdash (Ax)(x\varepsilon\pi(G) \rightarrow Set(x))$ i lys av definisjonen av $\pi(G)$. Det følger derfor ved hjelp av nødvendighetsregelen R3 at

(3) $Nec((Ax)(x\varepsilon\pi(G) \rightarrow Set(x)))$. Herav (4) $\pi(G)\ Inkl\ \{x:Set(x\}$. Fra (2), (4) og Teorem 8.8 følger så $Det(Un(\pi(G)))$. Fra dette og Definisjon 8.2 følger $Det(\xi(G))$. **QED**.

Teorem 8.10 $CL(G)\ \&\ G\ Inkl\ \{x: Set(x)\}^2 \rightarrow CL(\xi(G))$

Bevis: Anta (1) $CL(G)\ \&\ G\ Inkl\ \{x: Set(x)\}^2$. Det vil være tilstrekkelig å vise:

(+) $(Det(\xi(G))\ \&\ (Ew)(w\varepsilon\xi(G))\ \&\ \xi(G)\ Inkl\ V;a)\ v\ (Det(\xi(G))\ \&\ \neg(Ew)(w\varepsilon\xi(G))\ \&\ \xi(G)=\emptyset)$

Tilfelle (i): (2) $(Ew)(w\varepsilon\xi(G))$. Fra (1) og Teorem 8.9 følger umiddelbart (3) $Det(\xi(G))$. Anta $x\varepsilon\xi(G)$. Da følger ved hjelp av definisjonen av ξ at $x\varepsilon UN(\pi(G))$ og derfor at (4) $x\varepsilon y\ \&\ y\varepsilon\pi(G)$ for noe y. Ved hjelp av definisjonen av π kan man da slutte at $y\ Fn;m\ \beta$ for noe β. Da følger ved hjelp av definisjonen av $Fn;m$ at $y\ Inkl\ \{x: Set(x)\}^2$. Siden $x\varepsilon y$ følger det at det finnes w,w' slik at $x=\langle w,w'\rangle$ der $w,w'\varepsilon\{x:Set(x)\}$. Det følger at Set(w) og Set(w'), og derfor at At(x), ie $x\varepsilon V;a$. Vi har dermed vist: (5) $\xi(G)\ Inkl\ V;a$ Fra (2), (3) og (5) følger (+).

Tilfelle (ii): (6) $\neg(Ew)(w\varepsilon\xi(G))$. Fra (1) og Teorem 8.9 følger (7) $Det(\xi(G))$. Dette impliserer at $L\text{-}Det(w\varepsilon\xi(G))$ og derfor ved hjelp av Teorem 6.10 at $L\text{-}Det(\neg(Ew)(w\varepsilon\xi(G)))$. Dette og (6) impliserer

(8) $Nec(\neg(Ew)(w\varepsilon\xi(G)))$. Herav:

(9) $Nec((Aw)(w\varepsilon\xi(G) \leftrightarrow w\neq w))$ ie $Nec((Aw)(w\varepsilon\xi(G) \leftrightarrow w\varepsilon\emptyset))$

Da kan man slutte $(Ey)(At(y)\ \&\ y=\emptyset\ \&\ y=\xi(G))$. Det følger at (10) $\xi(G)=\emptyset$. Fra (6), (7) og (10) følger (+). **QED**.

Teorem 8.11 $CL(F)\ \&\ F\ Inkl\ V;a^2 \rightarrow CL(Dom(F))$

Bevis: Anta (1) $CL(F)\ \&\ F\ Inkl\ V;a^2$. Vi vil først bevise (+) $Det(Dom(F))$ ie

(++) $(Ax)((Ey)(\langle x,y\rangle\varepsilon F \rightarrow Nec((Ey)(\langle x,y\rangle\varepsilon F)))\ \&\ (Ax)(\neg(Ey)(\langle x,y\rangle\varepsilon F \rightarrow Nec(\neg(Ey)(\langle x,y\rangle\varepsilon F)))$

Fra (1) følger CL(F) og derfor Det(F). Fra dette følger i sin tur Det(F) og derfor $L\text{-}Det(\langle x,y\rangle\varepsilon F)$. Da har vi ved hjelp av Teorem 6.10 at (2) $L\text{-}Det((Ey)(\langle x,y\rangle\varepsilon F))$ og (3) $L\text{-}Det(\neg(Ey)(\langle x,y\rangle\varepsilon F))$. Fra (2) følger den første halvdelen av (++). Fra (3) følger den andre halvdelen. Anta nå for vilkårlig x at $(Ey)(\langle x,y\rangle\varepsilon F)$. Da finnes y slik at

© 2012 Morten Harboe Rognes

<x,y>εF. Herav At(z) & z=<x,y> & zεF for noe z. Men far (1) har vi F Inkl V;a^2. Det følger at xεV;a. Siden x var vilkårlig har vi vist (Ax)(xεDom(F) → xεV;a). Siden L-Det(xεDom(F)) og L-Det(xεV;a) følger (4) Dom(F) Inkl V;a

Tilfelle (i): (Ew)(wεDom(F)). Da følger CL(Dom(F)) ved hjelp av (+) og (4)

Tilfelle (ii): (5) ¬(Ew)(wεDom(F)). Da har vi ved hjelp av (++) at Nec(¬(Ew)(wεDom(f))). Herav Nec((Ew)(wεDom(f)) ↔ wεø). Da kan man slutte at (6) Dom(F)=ø Fra (+), (5) og (6) følger CL(Dom(F)) også i dette tilfellet. **QED**.

Teorem 8.12 (Aα)(α < β & (Aδ)(δ<α → F(δ)). → F(α)) → (Aα)(α<β → F(α))

Bevis: Anta (1) (Aα)(α < β & (Aδ)(δ<α → F(δ)). → F(α)) og anta for reduktio ad absurdum at det finnes α slik at (2) α<β & ¬F(α). Sett per definisjon:

(3) c0 = {x: xεβ & ¬F(x)}. Fra (2) følger det at (4) c0≠ø

Siden {x: xεβ & ¬F(x)} Inkl β & Wfr(ε,β) følger det at det finnes δ slik at

(5) δεc0 & c0Ω{λ: λ <δ} = ø Da følger:

(Aλ)(λ < δ →(λ <β → F(λ))). Siden δεc0 har vi δ εβ og derfor δ < β. Derfor

(Aλ)(λ<δ → F(λ)) & δ<β. Fra dette og (1) følger F(δ). Vi har altså

(6) δ<β & F(δ). Men dette strider mot at δεc0. Det kan altså ikke finnes α som oppfyller kravet (2). **QED**.

Teorem 8.13 CL(G) & G Inkl {x: Set(x)}^2 &
f Fn;m β & g Fn;m δ &
(Aα)(α < β → f(α) = G(Rest(f,α))) &
(Aα)(α<δ → g(α) = G(Rest(g,α)) & β =< δ →
(Aα)(α < β → f(α) = g(α))

Bevis: Anta

(1.1) CL(G) & G Inkl {x: Set(x)}^2

(1.2) f Fn;m β & g Fn;m δ

(1.3) (Aα)(α < β → f(α) = G(Rest(f,α)))

(1.4) (Aα)(α<λ → g(α) = G(Rest(g,α))

(1.5) β =< λ

Anta at (2) α<β. Anta påstanden holder for alle δ mindre enn α. Vi skal da vise at den holder for α. Ved hjelp av Teorem 8.12 kan vi da slutte at den holder for alle α mindre enn β. Anta altså at (2) holder og dessuten:

(3) (Aδ)(δ<α → f(δ)=g(δ)). Fra dette følger (4) Rest(f,α) = Rest(g,α))

Siden α<β =<λ følger fra (1.3) og (1.4):

(5) f(α) =G(Rest(f,α)) & g(α)= G(Rest(g,α))

Fra (5) og (4) følger f(a) =g(α). Vi har nå vist:

(Aα)[α<β & (Aδ)(δ<α → f(δ)=g(δ)). → f(α)=g(α)] Fra dette og Teorem 8.12 følger så at (Aα)(α<β → f(α)=g(α)). **QED**.

Teorem 8.14[20] (Rekursjonsteorem)

CL(G) & G Inkl {x: Set(x)}^2 →

(a) ξ(G) Fn On

(b) (Aα)(ξ(G)(α) = G(Rest(ξ(G),α)))

(c) CL(H) & H Fn On & (Aα)(H(α) = G(Rest(H,α))) → H = ξ(G)

20 Beviset som gis her er analogt med beviset for Teorem 7.40 i Takeuti & Zaring [1], side 42.

© 2012 Morten Harboe Rognes

Bevis: Anta (1) CL(G) & G Inkl {x: Set(x)}^2. Vi skal vise at (a) -(c) holder.

Ad (a): Anta xεξ(G). Da har man for noe y at xεy & yεπ(G). Siden yεπ(G) følger y Fn;m β for noe β. Da y Inkl {x: Set(x)}^2. Det følger at ξ(G) Inkl {x: Set(x)}^2 og derfor at Rel(ξ(G)).

Anta (2) <x,y><x,z>εξ(G) det følger da at det finnes f,g og β,λ slik at

(3) <x,y>εf & f Fn;m β &Set(f) & (Aα)(α<β → f(α)=G(Rest(f,α)))

(4) <x,z>εg & g Fn;m λ &Set(g) & (Aα)(α<λ → f(α)=G(Rest(f,α)))

Siden β=<λ v λ =< β følger det ved hjelp av Teorem 8.13 at y=f(x) =g(x)=z.

Vi har dermed bevist at ξ(G) er en entydig og en relasjon.

Vår neste mål er å vise at Dom(ξ(G)) = On. For å vise dette tar vi først sikte på å bevise de følgende to påstander:

(5) Dom(ξ(G)) Inkl On og

(6) Tr(Dom(ξ(G))

Vi tar først for oss (5): Anta for vilkårlig x at xεDom(ξ(G)). Da finnes y slik at <x,y>εξ(G). Da har vi at det finnes f og β slik at

<x,y>εf & f Fn;m β & (Aα)(α<β → f(α)= G(Rest(f,α)))

Da har vi xεβ og derfor siden Ord(β) at Ord(x). Det følger at xεOn. Dette viser at (5) holder.

La oss så se på (6): Vi må vise at CL(Dom(ξ(G)). Men dette følger fra (1), Teorem 8.10 og Teorem 8.11. Dessuten skulle det ikke være vanskelig å se at (Ax)(xεDom(ξ(G)) → Set(x)). Anta nå for vilkårlige x,y at xεy & yεDom(ξ(G)). Da finnes z, β og f slik at <y,z>εf & f Fn;m β & Set(f) & (Aα)(α<β → f(α)= G(Rest(f,α))). Da må vi ha yεβ siden β er domenet til f. Det følger at xεy & yεβ. Men β er et ordinal tall. Da må også x være det ifølge Teorem 7.7. Siden β er transitiv følger at xεβ. Da er x med i domenet til f. Det følger at xεDom(ξ(G)). Dette viser at (6) holder.

Ilys av (5) er det to muligheter. Dom(ξ(G)) =On eller Dom(ξ(G)) SInkl On. I det første tilfelle har vi at (a) holder. Det vil være nok å vise at den andre muligheten leder til motsigelser. Anta derfor for reduktio ad absurdum at

(7) Dom(ξ(G)) SInkl On. Fra dette, (6) og Teorem 7.8 a følger , siden Ord(On) at Dom(ξ(G))εOn. Dette innebærer at det finnes λ slik at

Ord(λ) & λ = Dom(ξ(G))

Definer nå en funksjon g ved:

(8) g = ξ(G) U {<λ, G(Rest(ξ(G),λ))>}

Det er lett å se at Set(Rest(ξ(G),λ)) og derfor at Set({<λ, G(Rest(ξ(G),λ))>}). Videre må vi ha Set(g) (Jmf. Teorem 6.16). Det er også lett å vise at

(9) g Fn;m λ+1 & Set(g)

(10) (Aα)(α < λ+1 → g(α) = G(Rest(ξ(G),λ)))

Det følger at gεπ(G) og at λεDom(ξ(G)). Men da har vi siden λ=Dom(ξ(G)) at λελ som er umulig. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for punkt (a) i satsen.

Ad (b): Anta (1) αεOn Da har vi i lys av punkt (a) at αεDom(ξ(G)) og følgelig at det finnes β, y, f slik at

(2) αεβ & <β,y>εf & f Fn;m β & Set(F) &
(Aδ)(δ<β → f(δ) =G(Rest(f,δ)) & f Inkl ξ(G).

Fra det at αεβ følger ved hjelp av den tredje konjunkten i (2) at αêDom(f) og derfor at det finnes z slik at <α,z>εf. Dette og den siste konjunkten i (2) impliserer at

(3) f(α) = ξ(G)(α) siden vi under punkt (a) viste at ξ(G) er en funksjon.

© 2012 Morten Harboe Rognes

Videre følger siden $\alpha<\beta$ ved hjelp av den nest siste konjunkten i (2) at

(4) $f(\alpha) = G(Rest(f,\alpha))$

Anta for vilkårlig λ at $\lambda<\alpha$. Da har vi siden f Inkl $\xi(G)$ og $\lambda<\alpha<\beta$ at $\lambda\varepsilon\beta = Dom(f)$. Det følger at $f(\lambda) = \xi(G)(\lambda)$. Vi har altså $(A\lambda)(\lambda<\alpha \rightarrow f(\lambda) = \xi(G)(\lambda))$. Dette impliserer at
(5) $Rest(f,\alpha)= Rest(\xi(G),\alpha)$. Fra (3), (4) og (5) følger $\xi(G)(\alpha) = G(Rest(\xi(G),\alpha)$. Dette viser at punkt (b) holder.

Ad (c): Anta (1) CL(H) & H Fn On & $(A\alpha)(H(\alpha) = G(Rest(H,\alpha)))$.
Nå har man fra punkt (b) : (2) $(A\alpha)(\xi(G)(\alpha) = G(Rest(\xi(G),\alpha)))$
Anta for vilkårlig δ at (3) $\delta\varepsilon$On og anta (4) $(A\alpha)(\alpha<\delta \rightarrow H(\alpha) = \xi(G)(\alpha))$. Da har vi $Rest(H,\delta) = Rest(\xi(G),\delta)$. Da følger imidlertid ved hjelp av (1) og (2) at

(5) $H(\delta) = G(Rest(H,\delta)) = G(Rest(\xi(G)),\delta)) = \xi(G)(\delta)$.

Vi har altså $(A\delta)(\delta<$On & $(A\alpha)(\alpha<\delta \rightarrow H(\alpha) = \xi(G)(\alpha)). \rightarrow H(\delta) = \xi(G(\delta))$. Fra dette og Teorem 8.12 følger $(A\alpha)(\alpha\varepsilon$On $\rightarrow H(\alpha) = \xi(G)(\alpha))$. Men dette innebærer at $H=\xi(G)$.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Vi sier at α er et etterfølgerordinaltall om α enten er ø eller det finnes et ordinaltall β slik at $\alpha=\beta+1$. α sies å være et grenseordinaltall om det (i) er et ordinaltall og (ii) ikke er et etterfølgerordinaltall. Klassen av etterfølgerordinaltall betegnes med K;I. Klassen av grenseordinaltall betegnes med K;II :

Definisjon 8.3 (a) $K;I = \{\alpha: \alpha=ø \vee (E\beta)(\alpha=\beta+1)\}$
(b) $K;II = \{x: Ord(x) \& \neg(x\varepsilon K;I)\}$

Det første uendelige ordinaltall, ω, definerer vi på den følgende måte:

Definisjon 8.4 $\omega = \{\alpha: \alpha U\{\alpha\}$ Inkl $K;I\}$

Det følgende er det vanlige induksjonsprinsipp for de endelige ordinaltall, dvs. de naturlige tall:

Teorem 8.15 (Induksjonsprinsipp) $ø\varepsilon a \ \& (A\alpha)(\alpha\varepsilon a \rightarrow \alpha+1\varepsilon a) \rightarrow (A\alpha)(\alpha\varepsilon\omega \rightarrow \alpha\varepsilon a)$

Bevis: Anta (1) $ø\varepsilon a$ og (2) $(A\alpha)(\alpha\varepsilon a \rightarrow (\alpha+1)\varepsilon a)$. Ved hjelp av definisjonen av ω ser man lett at (3) ω Inkl On. Anta for reduktio ad absurdum at det finnes α der
(4) $\alpha\varepsilon\omega \ \&\neg(\alpha\varepsilon a)$. Sett per definisjon $B = \{\alpha: \alpha\varepsilon\omega \ \& \neg(\alpha\varepsilon a)\}$. Da har man (4) $ø\neq B$ Inkl ω. Siden Ord(On) følger da ved hjelp av Teorem 7.4 at (5) $(Ex)(x\varepsilon B \ \& \ B \Omega x =ø)$. Dette er ekvivalent med: (6) $(Ex)(x\varepsilon B \ \& \ B\Omega \{y: y<x\} =ø)$. Dette innebærer at det finnes λ slik at

(7) $\lambda \varepsilon\omega \ \& \neg(\lambda\varepsilon a)$
(8) $\neg(E\beta)(\beta\varepsilon B \ \& \ \beta<\lambda)$

Siden vi ifølge (1) har at $ø\varepsilon a$ følger der ved hjelp av (7) at (9) $ø\neq\lambda$. Siden $\lambda\varepsilon\omega$ har vi, siden (9) holder og ω Inkl K;I at (10) $\lambda = \beta+1$ for noe $\beta\varepsilon$On. Vi har

(11) λ Inkl $\lambda+1$ Inkl K;I

(Siden $\lambda\varepsilon\omega$ Inkl K;I har vi i lys av Definisjon 8.4 $\lambda U\{\lambda\}=\lambda+1$ Inkl K;I) Siden vi ifølge (10) har $\lambda=\beta U\{\beta\}$ (Jmf. definisjonen av $\beta+1$) følger ved hjelp av (11) at $\beta U\{\beta\}$ Inkl K;I. Fra dette kan man ved hjelp av Definisjon 8.4 slutte $\beta\varepsilon\omega$. Siden det fra (10) følger at $\beta\varepsilon\lambda$ har vi $\beta<\lambda$. Har vi da $\neg(\beta\varepsilon a)$ følger i lys av definisjon av B at $\beta\varepsilon B$. Men da ville vi ha $(E\beta)(\beta\varepsilon B \ \& \ \beta<\lambda)$. Dette strider mot (8). Vi har derfor $\beta\varepsilon a$. Fra dette og (2) følger så

© 2012 Morten Harboe Rognes

β+1εa. Dette og (10) impliserer λεa. Men dette strider mot den andre konjunkten i (7).

Det følger at det ikke kan finnes α slik at (4), med andre ord har vi at (Aα)(αεω → αεa). **QED**.

Det følgende teorem viser at ω, K;I og K;II er bestemte, videre at ω er et ordinaltall, en mengde og dessuten et grenseordinaltall:

Teorem 8.16	(a)	Det(K;I)
	(b)	Det(K;II)
	(c)	Det(ω)
	(d)	Set(ω)
	(e)	Ord(ω)
	(f)	ωεK;II

Bevis: *Ad (a)*: Det er nødvendig å vise at (1) (Ax)(xεK;I → Nec(xεK;I)) og at (2) (Ax)(¬(xεK;I) → Nec(¬(xεK;I))). Nå har man ved hjelp av definisjonen av K;I at xεK;1 er ekvivalent med at Ord(x) & (x=ø v (Ey)(Ord(y) & x= y+1)). Nå har man at Ord(x) er en L-bestemt formel. Det samme gjelder Ord(y) og x=y+1. (Se Teorem 7.1). Man kan derfor ved hjelp av Teorem 6.10 slutte at xεK;1 er en L-bestemt formel. Fra dette følger så (1) og (2). Dette viser at punkt (a) holder.

Ad (b): Man har ved hjelp av Definisjon8.3 at xεK;II sier det samme som Ord(x) & ¬(xεK;I). Siden uttrykket Ord(x) er L-bestemt i følge Teorem 7.10, og vi ovenfor, under punkt (a), har vist at xεK;I er L-bestemt, følger det ved hjelp av Teorem 6.10 at formelen Ord(x) & ¬(xεK;I) er L-bestemt. Fra dette og definisjonen av K;II følger Det(K;II). Dette viser at punkt (b) holder.

Ad (c): Definisjon 8.4 sier at ω = {x: Ord(x) & xU{x} Inkl K;I}. Nå har man at formelen Ord(x) er L-bestemt. Videre har vi at xU{x} Inkl K;I innebærer at per definisjon av Inkl at Nec((Ay)(yεxU{x} → xεK;I)). La oss forkorte dette siste uttrykket med "F(x)". Dette innebærer at "F(x)" forkorter formelen Nec((Ay)(yεxU{x} → xεK;I)). Da har vi ved hjelp av de modallogiske aksiomene F(x) → Nec(F(x)) og ¬F(x) → Nec(¬F(x)). Dette innebærer at uttrykket F(x) er L-bestemt. Siden Ord(x) også er L-bestemt har vi ved hjelp av Teorem 6.10 at formelen Ord(x) & xU{x} Inkl K;I er L-bestemt. Herav følger Det(ω).

Ad (d): Vi skal vise at Set(ω). Fra TA23 følger eksistensen av y slik at (1) At(y) & Nec(øεy & (Az)(At(z) & zεy → z+1εy)). Fra dette følger ved hjelp av TA8:

(2) At(y) & Nec(øεy & (Az)(zεy → z+1εy)). Fra dette følger i sin tur

(3) At(y) & Nec(øεy & (Az)(Ord(z) & zεy → z+1εy)). Fra dette og Teorem 8.15 kan man slutte: (4) At(y) & Nec((Az)(zεω → zεy)) ie At(y) & ω Inkl y. Fra dette og utsondringsaksiomet, TA 21 følger At(ω). Siden vi i kraft av foregående punkt har Det(ω) følger at Set(ω). Dette viser at punkt (d) holder.

Ad (e): Siden ω Inkl K;I & K;I Inkl On har vi (1) ω Inkl On. Videre har vi, siden Det(ω) & ω Inkl V;a & øεω at (2) CL(ω). Videre har vi (3) (Ax)(xεω → Set(x)). Anta (4) xεy&yεω. Da Ord(y) & y+1 Inkl K;I. Siden Ord(y) har vi Tr(y) og derfor siden xεy at (5) x Inkl y. Siden y+1 Inkl K;1 har vi x Inkl y Inkl y+1 Inkl K;1. Siden siden xεy følger xεK;I & x Inkl K1. Da har vi xU{x}=x+1 Inkl K;I. Fra dette og definisjonen av ω følger

© 2012 Morten Harboe Rognes

(6) $x\varepsilon\omega$. Men x,y var vilkårlige entiteter slik at (4). Det følger at (7) Tr(ω). Fra (1) og (2) og Teorem 7.17 følger (8) Ord(UN(ω)) Fra (7) følger (9) UN(ω) Inkl ω. Anta for vilkårlig x at $x\varepsilon\omega$ da har vi $xU\{x\}$ Inkl K:I & $\{xU\{x\}\}$ Inkl K;I Da $x+1\varepsilon\omega$. Siden vi har $x\varepsilon x+1\varepsilon\omega$ følger $x\varepsilon UN(\omega)$. Dette viser at ω Inkl UN(ω). Sammen med (9) impliserer dette Nec(UN(ω)=ω). Fra dette og (8) følger Ord(ω) ved hjelp av Teorem 6.2d og punkt (d).

Ad (f): Siden Ord(ω) & Set(ω) følger $\omega\varepsilon$On. Vi har ω Inkl K;1. Hadde vi nå, mot formodning, at $\omega\varepsilon$K;I ville vi ha $\omega U\{\omega\}=\omega+1$ Inkl K;I og følgelig i lys av definisjonen av ω at $\omega\varepsilon\omega$. Men siden Set(ω) vil det finnes y slik at At(y) & y=ω. Da ville vi ha $y\varepsilon y$ som er utelukket i kraft av fundierungsaksiomet.

Dette avslutter vårt bevis for satsen. **QED**.

Teorem 8.17 (Peanos postulater)

(a) $0\varepsilon\omega$

(b) $(Ax)(x\varepsilon\omega \rightarrow (x+1)\varepsilon\omega)$

(c) $(Ax)(x\varepsilon\omega \rightarrow (x+1)\neq\varnothing)$

(d) $(Ax)(Ay)(x,y\varepsilon\omega \rightarrow (x+1 = y+1 \rightarrow x=y))$

(e) $0\varepsilon a \;\&\; (A\alpha)(\alpha\varepsilon a \rightarrow (\alpha+1)\varepsilon a) \rightarrow (A\alpha)(\alpha\varepsilon\omega \rightarrow \alpha\varepsilon a)$

Bevis: *Ad (a)*: $\varnothing\varepsilon$K;I. Derfor har vi $\varnothing U\{\varnothing\}$ Inkl K;I. Det følger at $\varnothing\varepsilon\omega$.

Ad(b): Anta $x\varepsilon\omega$. Da har vi x+1 Inkl K;I. Dette innebærer at $xU\{x\}$ Inkl K;I. Fra dette kan man enn mer slutte at $x\varepsilon$K;I. Vi har $x+1\varepsilon$K;I $\leftrightarrow$ $x+1=\varnothing$ v $(Ey)(x+1=y+1)$. Siden Siden det er åpenbart at $(Ey)(x+1 =y+1)$ følger $x+1\varepsilon$K;I. siden x+1 Inkl K;1 har vi at $x+1U\{x+1\}$ Inkl K;I og derfor at $x+1\varepsilon\omega$.

Ad (c): Anta $x\varepsilon\omega$ Da har vi $x+1=xU\{x\}$. Det er da klart at $x\varepsilon x+1$ og derfor at $x+1\neq\varnothing$.

Ad (d): Anta (1) $x,y\varepsilon\omega$ og (2) $xU\{x\} = yU\{y\}$. Siden $x\varepsilon xU\{x\}$ har vi $x\varepsilon(yU\{y\})$. Det følger at (3) $x\varepsilon y$ v x=y. Tilsvarende har vi fra (1) og (2) at $y\varepsilon(yU\{y)\}$ og derfor at (4) $y\varepsilon x$ v y=x. Det vil nå være fire muligheter. Har vi $x\varepsilon y$ & $y\varepsilon x$ strider dette mot fundierungsaksiomet som impliserer at ε-relasjonen er velfundert. Har vi $x\varepsilon y$ & y=x har vi $x\varepsilon x$ som åpenbart er umulig. Har vi x=y og $y\varepsilon x$ har vi igjen at $x\varepsilon x$ som er umulig. Den eneste mulighet som gjenstår er derfor at x=y.

Ad (e): Denne påstanden er den samme som Teorem 8.15 som vi beviste ovenfor. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Ovenfor har vi vist at de vanlige aksiomene for aritmetikk kan utledes innenfor rammen av MZFC. Kan vi nå vise hvordan de aritmetiske operasjonene addisjon, multiplikasjon og potensering kan defineres innenfor dette systemet kan vi utlede alle de vanlige satsene i aritmetikken.

Definisjon 8.5 $Fn^{o}(f) \leftrightarrow (E\beta)(f\ Fn;m\ \beta \;\&\; Set(f))$

$Fn^{o}(f)$ innebærer at at f er en funksjon som tilordner mengder til mengder, som har et ordinaltall som sitt domene og som selv er en mengde.

Definisjon 8.6 $c(H,a) = \{<x,y>: Fn^{o}(x) \;\&\; [(x=0 \;\&\; y=a \;\&\; Set(a)) \text{ v}$

© 2012 Morten Harboe Rognes

(x≠ø & UN(Dom(x))≠Dom(x) & y = H(x(UN(Dom(x))))) v
(x≠ø & UN(Dom(x)) = Dom(x) & y = UN(Rgn(x)))]}

Merk at om x Inkl On så er UN(x) den minste øvre grensen til mengden x.

Teorem 8.18 CL(H) & H Inkl {x:Set(x)}^2 & Set(a) →
CL(c(H,a)) & c(H,a) Inkl {x:Set(x)}^2

Bevis: Det er nok, i lys av definisjonen av CL, å vise at Det(c(H,a)) siden vi åpenbart har at <ø,a>εc(H,a) om Set(a) og at c(H,a) Inkl {x:Set(x)}^2. La oss sette:

(1) Fnº(x) & (x=0 & y=a & Set(a)) v
Fnº(x) &(x≠ø & UN(Dom(x))≠Dom(x) & y = H(x(UN(Dom(x))))) v
Fnº(x)& (x≠ø & UN(Dom(x)) = Dom(x) & y = UN(Rgn(x)))]

Vi må vise at (1) → Nec((1)) og dessuten at Pos((1)) → (1)

(I) Vi tar først for oss (1) → Nec((1)). Anta derfor (1). Vi sondrer mellom tre tilfelle.

Tilfelle (i): Fnº(x) & (x=0 & y=a & Set(a)). Da har vi ved hjelp av Teorem 8.5 at Nec(Fnº(x)) siden L-Det(Set(x)) og L-Det(Ord(x)). Videre har vi åpenbart at Nec(x=0 & y=a & Set(a)) I dette tilfellet har vi derfor Nec((1)).

Tilfelle (ii): Fnº(x) &(x≠ø & UN(Dom(x))≠Dom(x) & y = H(x(UN(Dom(x)))))
På samme måte som under forrige tilfelle har vi Nec(Fnº(x)). Videre har vi Nec(x≠ø). Siden Fnº(x) følger Set(x). Da har vi Set(Dom(x)). Videre har vi Dom(x)=β for noe ordinaltall β. Det følger at Dom(x) Inkl On og derfor at (Az)(zεDom(x) → Set(z)). Fra dette følger Set(UN(Dom(x)). Det følger at Nec(UN(Dom(x)) ≠Dom(x))). Videre har vi Set(x(UN(Dom(x)))) siden Set(x) & x Inkl {z:Set(z)}^2 og derfor Nec(y=H(x(UN(Dom(x))))). Det følger at Nec((1)) også i dette tilfellet.

Tilfelle (iii): Fnº(x)& (x≠ø & UN(Dom(x)) = Dom(x) & y = UN(Rgn(x)))
På samme måte som i forrige tilfelle innser man at Nec((1)) siden vi har Set(x) og Set(x) og derfor Set(Rgn(x)). Videre har vi Rgn(x) Inkl {y: Set(y)} og derfor Set(UN(y)).

Man ser altså at vi må ha Nec((1)) i alle tilfellene. Det følger at (1) → Nec((1)).

(II) Det er nødvendig å bevise Pos((1)) → (1). Anta Pos((1)). Da har man Pos(Fnº(x)). Nå har man L-Det(Fnº(x)). Vi må derfor ha Fnº(x). Siden vi da har at Set(Dom(x)), Set(UN(Dom(x))), Set(Rgn(x)), Set(UN(Rgn(x)) er det forholdsvis lett å se at de diverse disjunktene i (1) er L-bestemte. På dette grunnlag kan man så etter mønster av tidligere bevis vise at (1) holder. Detaljene her overlates til leseren. Vi anser dermed Teorem 8.18 som bevist. **QED**.

Det neste teoremet er et viktig resultat. Det kan brukes til å rettferdiggjøre definisjoner ved transfinit rekursjon:

Teorem 8.19 CL(H) & H Inkl {x:Set(x)}^2 & Set(a) & F = ξ(c(H,a)) →
(a) F(0) =a
(b) F(α+1) = H(F(α))
(c) βεK;II → F(β) = UN/α<β/(F(α))

Bevis: Anta (1) CL(H) & H Inkl {x:Set(x)}^2 & Set(a) og (2) F = ξ(c(H,a))
Da har vi ikraft av foregående teorem av (3) CL(c(H,a)) & c(H,a) Inkl {x:Set(x)}^2. Sett (4) G =c(H,a). Da har vi ved hjelp av (2) og Teorem 8.14, rekursjonsteoremet:

© 2012 Morten Harboe Rognes

$(A\alpha)(F(\alpha) = G(Rest(F,\alpha))$

Ad (a): Vi har $F(0) = G(Rest(F,\emptyset)) = G(\emptyset) = c(H,a)(\emptyset) = a$

Ad (b): Vi har $UN(Dom(Rest(F,\alpha+1))) = UN(\alpha+1)=\alpha \neq \alpha+1$. Da har vi:

$F(\alpha+1) = G(Rest(F, \alpha+1)) = c(H,a)(Rest(F,\alpha+1))$

$= H(Rest(F,\alpha+1))(UN(Dom(Rest(F,\alpha+1))))$

$= H(Rest(F,\alpha+1)(\alpha) = H(F(\alpha))$

Ad (c): Anta $\beta\varepsilon K;II$. Da har vi $UN(\beta) = \beta$ og derfor at

$UN(Dom(Rest(F,\beta)) = UN(\beta) = \beta = Dom(Rest(F,\beta))$ Man har derfor:

$F(\beta) = G(Rest(F,\beta)) = c(H,a)(Rest(F,\beta)) = UN(Rgn(Rest(F,\beta))$

$= UN(\{F(\alpha): \alpha\varepsilon\beta\})$

$= UN/\alpha<\beta/(F(\alpha))$

Dette avslutter beviset. **QED**.

Ved hjelp av Teorem 8.19 kan man rettferdiggjøre vanlige rekursive definisjoner. Vi gir i første omgang to viktige eksempler.

Definisjon 8.7 (Det rene kumulative attributthierarki)

(a) $A;c(0) = \emptyset$

(b) $A;c(\alpha+1) = A;c(\alpha) \cup Pt(A;c(\alpha))$

(c) $\beta\varepsilon K;II \rightarrow A;c(\beta) = UN/\alpha<\beta/(A;c(\alpha))$

Denne definisjonen kan rettferdigjøres på den følgende måte: Definer H ved:

$H = \{< x, x \cup Pt(x)>: Set(x)\}$ Man kan også definere H slik:

$H= \{y: (Ez)(Ew)(Ex)(Set(x) \& y=<z,w> \& z=x \& w=x \cup Pt(x))\}$

Gitt denne definisjonen av H er det relativt lett å vise at $CL(H) \& H$ Inkl $\{x: Set(x)\}^2$. Ved hjelp av Teorem 8.9 har vi da, om vi setter $A;c= \xi(c(H,\emptyset))$, at A;c oppfyller kravene i definisjonen rett ovenfor.

Det rene kumulative mengdehierarki defineres på den følgende måte:

Definisjon 8.8 (Det rene kumulative mengdehierarki)

(a) $M(0) = \emptyset$

(b) $M(\alpha+1) = M(\alpha) \cup Pt;m(M(\alpha))$

(c) $\beta\varepsilon K;II \rightarrow M(\beta) = UN/\alpha<\beta/(M(\alpha))$

I denne forbindelse definerer vi H ved:

$H=\{<x, x \cup Pt;m(x)>: Set(x)\}$. Man kan da igjen forholdsvis lett vise at $CL(H) \& H$ Inkl $\{x: Set(x)\}^2$. Setter man $M= \xi(c(H,\emptyset))$ og bruker Teorem 8.19 er det ikke vanskelig å se at M oppfyller de kravene som er nevnt i Definisjon 8.8.

Vi vil etterhvert vise endel viktige, men forholdsvis elementære, satser om det rene kumulative egenskapshierarkiet A;c, og det tilsvarende mengdehierarkiet M Et hovedresultat vi ønsker å bevise er at

$(Ax)(At(x) \leftrightarrow (E\alpha)(x\varepsilon A;c(\alpha))$

Det denne satsen sier er ethvert attributt er med i $A;c(\alpha)$ for noe ordinaltall og omvendt at dersom x er med i $A;c(\alpha)$ for noe α er x et attributt. I denne forbindelse kan det bemerkes at kondisjonalen mot venstre forholdvis lett lar seg bevise ved induksjon på α. For å bevise kondisjonalen mot høyre trenger vi imidlertid en type ε-induksjonsprinsipp som vi nå vil

© 2012 Morten Harboe Rognes

undersøke nærmere.

Vi definerer Fund(a), a er en fundert relasjon ved:

Definisjon 8.9 Fund(a) ↔

(i) $(Ax)(x\neq ø \ \& \ At(x) \rightarrow (Ey)(y\varepsilon x \ \& \ (Az)(z\varepsilon x \rightarrow \neg(<z,y>\varepsilon a)))))$

(ii) $(Ax)(x\neq ø \ \& \ At(x) \rightarrow (Eu)(At(u) \ \& \ x \text{ Inkl;e } u \ \&$
$(Az)(Aw)(w\varepsilon u \ \& <z,w>\varepsilon a \rightarrow z\varepsilon u)))$

Teorem 8.20 $Fund(a) \ \& (Ay)(At(y) \ \& (Ax)(<x,y>\varepsilon a \rightarrow F(x)) \rightarrow F(y)) \rightarrow$
$(Ax)(At(x) \rightarrow F(x))$

Bevis: Anta (1) Fund(a) og (2) $(Ay)(At(y) \ \& (Ax)(<x,y>\varepsilon a \rightarrow F(x)) \rightarrow F(y))$. Vi tar naturligvis sikte på å bevise: $(Ax)(At(x) \rightarrow F(x))$. Anta for reduktio ad absurdum at (3) $(Ex)(At(x) \ \& \ \neg F(x))$. Da finnes det x0 der vi har (4) $At(x0) \ \& \ \neg F(x0)$. Da har vi at (5) $At(\{x0\}) \ \& \ \{x0\} \neq ø$. Fra (1), (5) og den andre komponenten i Definisjon 8.9 kan man da slutte at det finnes u der man har:

(6) $At(u) \ \& \ \{x0\} \text{ Inkl;e } u \ \& (Az)(Aw)(w\varepsilon u \ \& <z,w>\varepsilon a \rightarrow z\varepsilon u)$

Sett nå per definisjon: (7) $c= \{w: w\varepsilon u \ \& \ \neg F(w)\}$. Da har vi, ved hjelp av utsondringsaksiomet, at (8) $At(c) \ \& \ c\neq ø$. Fra dette, (1) og den første klausulen i Definisjon 8.9 følger at det finnes y slik at (9) $y\varepsilon c \ \& (Az)(z\varepsilon c \rightarrow \neg(<z,y>\varepsilon a))$. Sammen med (7) impliserer dette (10) $y\varepsilon c \ \& (Az)(z\varepsilon u \ \& \ \neg F(z) \rightarrow \neg<z,y>\varepsilon a)$, med andre ord har vi: (11) $y\varepsilon c \ \& (Az)(z\varepsilon u \ \& <z,y>\varepsilon a \rightarrow F(z))$. Siden $y\varepsilon c$ har vi $y\varepsilon u$. Fra dette og den siste konjunkten i (6) følger: (12) $(Az)(<z,y>\varepsilon a \rightarrow z\varepsilon u)$. Fra (11) og (12) følger:

(13) $(Az)(<z,y>\varepsilon a \rightarrow F(z))$. Siden $y\varepsilon c$ har vi $y\varepsilon u$. Siden At(u) ifølge (6) følger det ved hjelp av TA8 at At(y). Fra dette, (13) og (2) følger: F(y). Men dette strider mot at $y\varepsilon c$. Dette viser at satsen holder. **QED**.

Vårt neste mål er å vise at Fund(E). Den første halvdelen av denne påstanden, om man holder seg til Definisjon 8.9, følger fra Fundierungsaksiomet. Vi må imidlertid vise at også den andre halvdelen holder. Dette er innholdet i Teorem 8.22 nedenfor. Før vi gir bevis for Teorem 8.22 tar vi først for oss den følgende sats:

Teorem 8.21 $CL(H) \ \& \ H \text{ Inkl } \{x: Set(x)\}^2 \ \& \ Set(a) \rightarrow$
$(E!f)(Set(f) \ \& \ f \text{ Fn;m } \omega \ \& \ f(0)=a \ \& \ (A\alpha)(f(\alpha+1) = H(f(\alpha))))$

Bevis: Fra forutsetningene og Teorem 8.19 følger i det vi setter $F = \xi(c(H,a))$

(1.1) $F(0) =a$

(1.2) $F(\alpha+1) = H(F(\alpha))$

(1.3) $\beta\varepsilon K;II \rightarrow F(\beta) = UN/\alpha<\beta/(F(\alpha))$

Sett nå f= Rest(F,ω). Da har vi at f Fn;m ω, videre at Set(f). Dessuten skulle det være ganske klart at $f(0)=a$ og at $(A\alpha)(f(\alpha+1)=H(f(\alpha))$. Videre følger det at f er entydig bestemt. Dette viser at satsen holder. **QED**.

Teorem 8.22 $(Ax)(x\neq ø \ \& \ At(x) \rightarrow (Eu)(At(u) \ \& \ x \text{ Inkl;e } u \ \&$
$(Az)(Aw)(z\varepsilon w \ \& w\varepsilon u \ \& \rightarrow z\varepsilon u)))$

Bevis: Anta for vilkårlig x at (1) $At(x) \ \& \ x\neq ø$. Definer G ved å sette:

(2) $G= \{<\{x \text{ U } UN(x)\},\{x\}>: At(x)\}$

© 2012 Morten Harboe Rognes

Det er ikke særlig vanskelig å vise at (3) CL(G) & G Inkl {x: Set(x)}^2. Fra (1) følger (4) Set({x}). Fra (3), (4) og Teorem 8.21 kan man slutte at de finnes f der:

(5.1) Set(f) & f Fn;m ω

(5.2) f(0) = {x}

(5.3) f(n+1) = G(f(n))

Vi setter per definisjon (6) b = UN(UN/n<ω/(f(n))). Det er ikke spesielt vanskelig å vise at (7) Set(UN/n<ω/(f(n))). Det følger at (8) At(b)

Vi skal vise at x Inkl;e b. Nå har man (9) {x} = f(0) Inkl UN/n<ω/(f(n)). Det følger fra dette at UN({x}) Inkl UN(UN/n<ω/(f(n))). Siden UN({x}) =x følger herav x Inkl UN(UN/n<ω/(f(n))) =b. Herav x Inkl b og derfor (10) x Inkl;e b

Anta nå for vilkårlige y,z at (11) yεz & zεb Ved hjelp av (6) følger herav

(12) yεz & zεr & rεf(n) for noe r og for noe n<ω. Nå har man (5.1) -(5.3) at f(n)= {p} for noe p. Da har man f(n+1) = G(f(n)) = {p U UN(p)}. Siden rεf(n) følger r=p og derfor zεp. Siden vi da må ha yεz & zεp følger yεUN(p) og derfor y ε pUUn(p) ε f(n+1). Fra dette følger

y ε p U UN(p) ε UN/n<ω/(f(n)) og derfor yεUN(UN/n<ω/(f(n))) =b. Siden y,z var vilkårlige entiteter som oppfylte (11) har vi vist:

(13) (Ay)(Az)(yεz & zεb → yεb)

Fra (8), (10) og (13) følger (Eu)(At(u) & x Inkl;e u &(Az)(Aw)(zεw &wεu & → zεu))). Dette viser at teoremet holder. **QED**.

Teorem 8.22 sier at ethvert ikke-tomt attributt er ekstensjonalt inkludert i et annet transitivt attributt. Det er imidlertid klart at Teorem 8.22 kan skjerpes til Teorem 8.23 rett nedenfor siden det tilfellet der x=ø er trivielt oppfylt fordi (Az)(Aw)(zε w & wεø → zεø) og vi selvfølgelig har at At(ø) & ø Inkl;e ø.

Teorem 8.23 (Ax)(At(x) → (Eu)(At(u) & x Inkl;e u & (Az)(Aw)(zεw &wεu → zεu)))

Vårt neste teorem uttrykker at E er en fundert relasjon:

Teorem 8.24 Fund(E)

Bevis: Dette følger ved hjelp av Fundierungsaksiomet og Teorem 8.22. **QED**.

Teorem 8.25 (ε-induksjon)
(Ay)(At(y) → .(Ax)(xεy → F(x)) → F(y)) → (Az)(At(z) → F(z))

Bevis: Dette følger fra Teorem 8.20 og Teorem 8.24. **QED**.

Selvom de prinsippene vi har vist ovenfor kan sies å ha en viss interesse i seg selv er det ε-induksjonsprinsippet vi har bevist rett ovenfor ikke tilstrekkelig for å kunne vise at

At(x) → (Eβ)(xεA;c(β)).

For å kunne etablere dette resultat viser det seg nødvendig å bruke aksiomene TA28 - TA30. Vi innfører relasjonen ε+ ved:

Definisjon 8.10 ε+ = {<x,y>: Pos(xεy)}

Det følgende er en variant av Teorem 8.22. Som man ser er det vesentlige likhetstrekk mellom

© 2012 Morten Harboe Rognes

beviset for Teorem 8.22 og den følgende sats.

Teorem 8.26
At(u) & u≠ø →
(Ey)(u Inkl y & Set(y) & Nec((Az)(Aw)(zεy & Pos(wεz) →wεy))

Bevis: Anta (1) At(u) & u≠ø . Vi definerer G ved:
(2) G={<{z: Pos(zεy)}U {w:(Er)(Pos(wεr)&Pos(rεy))}, y>: Set(y)}
Det er ikke spesielt vanskelig å vise at {z: Pos(zεy)} og {w:(Er)(Pos(wεr)&Pos(rεy))} eksisterer og er mengder ved hjelp av TA29 og TA30. Det er derfor ikke spesielt vanskelig å etablere: (3) CL(G) & G Inkl {x: Set(x)}^2. Nå har vi (4) Set({w: Pos(wεu)})
Fra (3), (4) og Teorem 8.20 kan vi derfor slutte at det finnes en entydig bestemt funksjon f slik at
(5.1) f(0) = {w: Pos(wεu)}
(5.2) f(n+1) = G(f(n))
Sett nå per definisjon (6) a0 = {z: (En)(nεω & z=f(n))} Definer videre b ved:
(7) b = UN/n<ω/(f(n)) . Da har man (8) b = UN(a0).
Det skulle være forholdsvis greit å etablere at (9) Set(a0) og (10) (Az)(zεa0 → Set(z)). Fra dette følger: (11) Set(b).
For å vise at satsen holder er det tilstrekkelig, i lys av (11), å vise følgende:
(i) u Inkl b
(ii) Nec((Az)(Aw)(zεb & Pos(wεz) →wεb))
Ad (i): Anta for vilkårlig z at zεu. Da har man Pos(zεu) og derfor i lys av (5.1) zεf(0) Inkl UN/n<ω/(f(n)) =b. Siden z var vilkårlig følger det at (i) holder.
Ad (ii): Anta for vilkårlige z,w at (12) zεb & Pos(wεz). Siden zεb følger ved hjelp av (7) at det finnes n der (13) n<ω & zεf(n). Nå har man (14) Set(f(n)) og fra den andre konjunkten i (13) følger: (15) Pos(zεf(n)) Fra (12), (15), (14) og definisjonen av G kan man slutte at (16) wεG(f(n)) = f(n+1) Inkl b. Vi har derfor vist, siden z,w var vilkårlige entiteter, at
(17) (Az)(Aw)(zεb & Pos(wεz) → wεb)
Nå har vi Set(b) & L-Det(Pos(wεz)). Det følger at (17) er L-bestemt. (Jmf. Teorem 6.10). Vi har derfor at Nec((Az)(Aw)(zεb & Pos(wεz) →wεb)). Dette viser at (ii) holder. **QED**.

Vi er nå istand til å gi et bevis for et teorem som er analogt med det prinsipp for ε-induksjon som vi ga bevis for ovenfor. Vi vil senere benytte denne satsen i vårt bevis for
(Ax)(At(x) ↔ (Eβ)(xεA;c(β)))
Som sier at noe er et attributt hvis og bare hvis det er et element på et eller annet nivå i det kumulative attributthierarki.

Teorem 8.27 (ε+ -induksjon)
(Ay)[At(y) & (Ax)(Pos(xεy) → Pos(F(x))) → Pos(F(y))] →
(Az)(At(z) → Pos(F(z)))

Anta (1) (Ay)[At(y) & (Ax)(Pos(xεy) → Pos(F(x))) → Pos(F(y))] og anta for reduktio ad absurdum at (2) ¬(Az)(At(z) → Pos(F(z))). Da finnes x0 slik at
(3) At(x0) & ¬Pos(F(x0)). Fra dette følger At({x0}) & {x0}≠ø. Fra dette følger ved hjelp av Teorem 8.26 at det finne en u med følgende egenskaper:
(4) {x0} Inkl u & Set(u) & Nec((Az)(Aw)(zεu & Pos(wεz) → wεu)

© 2012 Morten Harboe Rognes

Vi definerer c ved å sette: (5) c= {w: wεu & ¬Pos(F(w))}. Siden x0ε{x0} Inkl u i lys av (4) og vi dessuten har fra (3) at ¬Pos(F(x0)). Følger det at x0εc og derfor at (Ex)(xεc). Herav følger så (6) (Ex)(Pos(xεc)). Siden vi ifølge (4) har Set(u) følger det at c Inkl u og derfor at Set(c). Herav følger At(c). Dette, (6) og TA28 impliserer at det finnes rn y med følgende egenskaper:

(7) Pos(yεc) & ¬(Ew)(Pos(wεc) & Pos(wεy))

Herav har vi selvfølgelig fra den siste konjunkten at

(8) (Aw)(Pos(wεc) → ¬Pos(wεy))

Fra dette følger enn mer: (Aw)(wεc → ¬Pos(wεy)). Herav kan man så slutte følgende når man tar i betraktning definisjonen av c:

(9) (Aw)(wεu & ¬Pos(F(w)). → ¬Pos(wεy)) Herav:

(10) (Aw)(wεu & Pos(wεy). → Pos(F(w))

Fra (7) følger Pos(yεc) og derfor siden c Inkl u at (11) Pos(yεu). Siden Set(u) (Jmf(4)) kan man slutte fra 11 at yεu og derfor ved hjelp av (4) (Aw)(Pos(wεy) → wεu). Dette og (10) impliserer i sin tur

(11) (Aw)(Pos(wεy) → Pos(F(w))).

Siden Set(u) har vi At(u). Siden yεu har vi da At(y) ifølge TA8. Dette, (11) og (1) impliserer (12) Pos(F(y)). Men fra (7) har vi Pos(yεc) og derfor i lys av definisjonen av c at

Pos(yεu & ¬Pos(F(y))). Da Pos(yεu) & Pos(¬Pos(F(y))). Herav følger Pos(Nec(¬F(y))) og derfor ved hjelp av de modallogiske aksiomene at Nec(¬F(y)). Da ¬Pos(F(y)) som åpenbart strider mot (12). **QED**.

Vi trenger også følgende sats:

Teorem 8.28 a≠ø & CL(a) & a Inkl On → SN(a)εOn

Bevis: Anta (1) a≠ø & CL(a) & a Inkl On. Vi skal vise SN(a)εOn. I lys av definisjonen av On vil det være tilstrekkelig å bevise Ord(SN(a)). For å vise dette vil det, i henhold til Definisjon 7.3, være tilstrekkelig å vise:

(2.1) E We SN(a)

(2.2) Tr(SN(a))

La oss først vise at (2.1) holder: Vi har: (3) (Ax)(xεa → (Az)((Aw)(wεa → zεw) → zεx)) Fra dette følger ved hjelp av definisjonen av SN at (4) (Ax)(xεa → (Az)(zεSN(a) → zεx)) Fra dette følger i sin tur: (5) Nec((Ax)(xεa → (Az)(zεSN(a) → zεx))) og derfor ved hjelp av de modallogiske aksiomene:

(6) (Ax)(Nec(xεa) → Nec((Az)(zεSN(a) → zεx))). Herav:

(7) (Ax(Nec(xεa) → SN(a) Inkl x)

Ifølge (1) har vi CL(a). Da har vi Det(a) og derfor (Ax)(xεa → Nec(xεa)). Dette og (7) impliserer at (8) (Ax)(xεa → SN(a) Inkl x). Fra (1) har vi at det må finnes y slik at (9) yεa. Fra dette og den tredje konjunkten i (1) følger yεOn og derfor Ord(y). Fra dette og definisjonen av Ord har vi: (10) E We y. Fra (9) og (8) følger SN(a) Inkl y. Fra dette, (10) og definisjonen av We følger E We SN(a). Dette viser at (2.1) holder.

La oss så vise at (2.2) holder. Vi må da vise tre forhold.

(a) Vi må vise at CL(SN(a)). Vi vil først vise (11) Det(SN(a)). Anta xεSN(a). Da har vi (12) (Ay)(yεa → xεy). Anta for reduktio ad absurdum at Pos((Ey)(yεa & ¬(xεy)). Da finnes det y slik at Pos(yεa & ¬(xεy)). Fra dette følger: (13) Pos(yεa) & Pos(¬(xεy)). Siden vi ifølge (1) har CL(a) følger det at Det(a). Da har vi Nec((Ax)(xεa→Nec(xεa))). Fra dette og den første konjunkten i (13) følger (14) yεa. Siden

© 2012 Morten Harboe Rognes

a Inkl On ifølge (1) følger at Ord(y). Herav kan vi slutte at Set(y) Fra dette følger Nec(¬(xεy) → Nec(¬(xεy))) som sammen med (13) impliserer Pos(Nec(¬(xεy)) og derfor (15) ¬(xεy). Fra (14) og (15) kan man slutte (Ey)(yεa & ¬(xεy)). Dette strider åpenbart mot (12). Vi har derfor Nec((Ay)(yεa → xεy)) og derfor Nec(xεSN(a)). Siden x var en vilkårlig entitet som oppfylte kravet xεSN(a) har vi vist: (Ax)(xεSN(a) → Nec(xεSN(a))).

Anta på den annen side at (Ey)(yεa &¬(xεy)). Siden vi har Det(a) og Set(y) følger det at Nec((Ey)(yεa &¬(xεy)). Vi har dermed vist at (11) holder. For å vise at CL(SN(a)) holder må vi også vise at SN(a) Inkl V;a Siden a≠ø har vi at det finnes y der yεa. Da har vi som vist ovenfor at SN(a) Inkl y & Ord(y). Antar vi da at xεSN(a) for vilkårlig x har vi at xεyεOn og derfor xεOn siden Tr(On). Det følger at Ord(x) og derfor Set(x). Vi har derfor:

(16) (Ax)(xεSN(a) → Set(x)) Dette impliserer naturligvis at

(17) SN(a) Inkl V;a.

Det er to muligheter. (Ez)(zεSN(a)). I så fall har vi fra (17) og (11) at CL(SN(a)). Har vi derimot ¬(Ez)(zεSN(a)) kan vi slutte siden Det(SN(a)) at a=ø. Også i dette tilfellet har vi CL(SN(a)).

Endelig må det bevises at (18) (Ax)(Ay)(xεy & yεSN(a) → xεSN(a)). Anta derfor for vilkårlige x,y at xεy & yεSN(a). Da følger (Az)(zεa →yεz). Anta rεa for vilkårlig r. Siden a Inkl On ifølge (1) har vi rεOn. Videre følger xεy &yεr. Siden rεOn har vi Ord(r) og derfor Tr(r). Det følger at xεr. Siden r var vilkårlig har vi altså (Ar)(rεa → xεr), med andre ord at xεSN(a). Dette viser at (18) holder. Dermed har vi også gitt et fullstendig bevis for (2.2). Dette avslutter beviset. **QED**.

Teorem 8.29 a≠ø & CL(a) & a Inkl On → SN(a)εa

Bevis: Anta (1) a≠ø & CL(a) & a Inkl On. Fra dette kan vi ved hjelp av det foregående teoremet slutte (2) SN(a)εOn. Siden a≠ø har vi at det finnes y0 der (3) y0εa. Siden a Inkl On følger det at (4) Ord(y0). Siden vi også kan utlede at SN(a) Inkl y0 følger det ved hjelp av utsondringsaksiomet at det finnes z slik at (5) z=SN(a). Fra (2) kan vi da slutte at (6) zεOn. Anta at (Ay)(yεa → SN(a)εy) Da ville vi ha SN(a)εSN(a) og derfor zεz som er umulig siden z er et ordinaltall. Det følger at det finnes y1 der vi har:

(7) y1εa & ¬(SN(a)εy1). Siden y1εa har vi (8) y1εOn. Fra (6) og (8) følger det at (9) y1εz v z=y1 v zεy1. Fra (7) og (5) følger det at ¬(zεy1). Det følger derfor at

(10) y1εz v z=y1.

Tilfelle (i): Anta y1εz. Siden y1εa følger det at SN(a) Inkl y1. Dette innebærer i sin tur at z Inkl y1. Er z=y1 har vi SN(a)=y1εa som er det vi ønsker. Er z SInkl y1 har vi, siden z,y1 er ordinaltall, at zεy1. Men da SN(a)εy1 som strider mot (7). Det følger at SN(a)εa i dette tilfellet.

Tilfelle (ii): z=y1. Da følger det umiddelbart ved hjelp av (5) og (7) at SN(a)εa. **QED**.

Teorem 8.30 Set(x) & (Ay)(yεx → Set(y)) & x≠ø → Set(SN(x))

Bevis: Anta (1) Set(x) & (Ay)(yεx → Set(y)) & x≠ø . Siden Set(x) kan vi som i beviset for Teorem 8.28 vise at Det(SN(x)). Siden x≠ø følger det at yεx for noe y. Vi har da (2) SN(x) Inkl y. Siden yεx har vi ved hjelp av (1) at At(y). Fra dette og (2) følger ved hjelp av utsondringsaksiomet at At(SN(x)). Siden vi har Det(SN(x)) følger Set(SN(x)). **QED**.

Det følgende teorem sier at A;c(α) er en mengde for ethvert ordinaltall α og dessuten at A;c(α) er inkludert i A;c(β) om α er mindre enn β:

© 2012 Morten Harboe Rognes

Teorem 8.31 (a) $(A\alpha)(Set(A;c(\alpha)))$
(b) $(A\alpha)(A\beta)(\alpha<\beta \rightarrow A;c(\alpha)\ Inkl\ A;c(\beta))$

Bevis: *Ad (a)*: Påstanden bevises ved induksjon på α. (i) α=ø. Da har vi A;c(α)=ø og derfor, siden Set(ø), at Set(A;c(0)). (ii) Vi har A;c(β+1) = A;c(β)U Pt(A;c(β)). Siden vi etter induksjonshypotesen har Set(A;c(β)) har vi ved hjelp av potensmengde aksiomet at Set(Pt(A;c(β))) og videre, ved hjelp av foreningsmengdeaksiomet Set(A;c(β)U Pt(A;c(β))). Det følger at Set(A;c(β+1)). (iii) Vi har A;c(β) = UN/α<β/(A;c(α)) der βεK;II. Siden Set(β) har vi ved hjelp av replacementaksiomet Set(A;c "β). Fra dette og foreningsmengdeaksiomet følger så Set(UN(A;c"β)). Det følger at Set(A;c(β)).

Ad (b): Påstanden bevises ved induksjon på β. (i) Er β=0 er det åpenbart at den holder. (ii) Anta β=δ+1 og at satsen holder for δ. Anta α< δ+1 da har man α< δU{δ}. Er α<δ har vi etter induksjonshypotesen at

A;c(α) Inkl A;c(δ) Inkl A;c(δ)U Pt(A;c(δ)) = A;c(β).

Har vi α=δ følger A;c(α) =A;c(δ) Inkl A;c(δ)U Pt(A;c(δ))= A;c(β).

(iii) Anta βεK;II. og anta α<β. Da må det finnes λ slik at α<λ<β. Siden λ<β har vi ved hjelp av induksjonshypotesen har vi da A;c(α) Inkl A;c(λ) Inkl UN/α<β/(A;c(α)).
QED.

Den følgende sats viser at enhver egenskap er med i A;c(β) for et eller annet ordinaltall β. Med andre ord er enhver egenskap med på et eller annet nivå i det rene kumulative hierarki av attributter.

Teorem 8.32 $(Ax)(At(x) \rightarrow (E\beta)(x\varepsilon A;c(\beta)))$

Bevis: Satsen bevises ved ε+-induksjon. Anta

(1) At(y) & (Ax)(Pos(xεy) → Pos((Eβ)(xεA;c(β)))). Vi ønsker da å bevise at (Eβ)(yεA;c(β)). Nå har man Set(A;c(β)) og derfor:

(2.1) $(Ax)(A\beta)(x\varepsilon A;c(\beta) \rightarrow Nec(x\varepsilon A;c(\beta)))$

(2.2) $(Ax)(A\beta)(\neg x\varepsilon A;c(\beta) \rightarrow Nec(\neg x\varepsilon A;c(\beta)))$

(1), (2.1) og (2.2) impliserer (3) At(y) & (Ax)(Pos(xεy) → (Eβ)(xεA;c(β)))
Anta nå for vilkårlig x at (4) Pos(xεy). Da har vi fra (3):

(5) $\{\beta: x\varepsilon A;c(\beta)\} \neq ø$

(6) {β: xεA;c(β)} Inkl On

(7) CL({β: xεA;c(β)})

Vi setter nå per definisjon

(8) F = {<SN({β: xεA;c(β)}),x>: At(x)}

(9) y;m = {x: Pos(xεy)}

Fra (5) -(7) og Teorem 8.28 kan man da slutte (Ax)(xεy;m → F(x)εOn).
Vi definerer videre λ ved å sette:

(10) λ = UN(F"(y;m)) +1= UN({SN({β: xεA;c(β)}): Pos(xεy)}+1

Da følger det at (11) λεOn. Videre har vi ved hjelp av Teorem 8.29 at

(12) (Ax)(xεy;m → xεA;c(F(x)))

Videre har vi (Ax)(xεy;m → F(x) < λ). Ved hjelp av Teorem 8.31 har vi da at

(13) (Ax)(xεy;m → A;c(F(x)) Inkl A;c(λ)) Fra (12) og (13) følger:

(14) (Ax)(xεy;m → xεA;c(λ)). Nå har vi L-Det(xεA;c(λ)) og L_Det(xεy;m).

Det følger derfor fra (14) at

© 2012 Morten Harboe Rognes

(15) Nec((Ax)(Pos(xεy) → xεA;c(λ))). Fra dette følger i sin tur:
(16) Nec((Ax)(xεy → xεA;c(λ))
Da har man y Inkl A;c(λ) & At(y). Dette impliserer
yεPt(A;c(λ)) Inkl (A;c(λ) U Pt(A;c(λ))) = A;c(λ+1). Vi har derfor at (Eβ)(yεA;c(β)). Herav Pos((Eβ)(yεA;c(β))). Vi har altså bevist for alle y
(17) At(y) & (Ax)(Pos(xεy) → Pos((Eβ)(xεA;c(β)))) → Pos((Eβ)(yεA;c(β)))
Fra dette kan man ved hjelp av Teorem 8.27 slutte:
(Az)(At(z) → Pos((Eβ)(zεA;c(β))))
Siden uttrykket (Eβ)(zεA;c(β)) er L-bestemt kan man fra dette slutte at
(Az)(At(z) → (Eβ)(zεA;c(β))). **QED**.

Det følgende er omvendingen av Teorem 8.32:

Teorem 8.33 (Ax)((Eβ)(xεA;c(β)) → At(x))

Bevis: Vi viser dette ved induksjon på β. (i) Anta β=0. Da holder A;c(β)=ø og satsen holder da trivielt. (ii) Anta β=δ+1. Da har vi xεA;c(β)= A;c(δ) U Pt(A;c(δ)). Har man xεA;c(δ) følger At(x) ved induksjonshypotesen. Har man xεPt(A;c(δ)) følger ved hjelp av definisjonen av Pt at x Inkl A;c(δ) & At(x). Da holder åpenbart satsen. (iii) βεK;II. Da har man at xεA;c(β) = UN/α<β/(A;c(β)). Da finnes α <β slik at xε A;c(α). Ved hjelp av induksjonshypotesen følger da At(x). **QED**.

De to foregående teoremene kan sammenfattes slik i en sats:

Teorem 8.34 (Ax)(At(x) ↔ (Eβ)(xεA;c(β)))

Bevis: Dette følger umiddelbart fra Teorem 8.32 og Teorem 8.33. **QED**.

Man ser fra Teorem 8.34 at noe x er en egenskap hvis og bare hvis dette x er et element i det kumulative egenskapshierarki på et eller annet nivå.

Resten av teoremene i denne paragrafen skulle være temmelig selvforklarende. De trenger neppe omfattende kommentarer utover det som allerede er gitt av kommentarer.

Teorem 8.35 (Aα)(Aβ)(α<β → A;c(α) SInkl A;c(β))

Bevis: Dette bevises ved induksjon på β. (i) Anta β=0. Da holder satsen trivielt.
(ii) Anta β=δ+1. Da har vi A;c(β) = A;c(δ) U Pt(A;c(δ)). Siden α<β har vi α< (δ+1) og derfor α=δ eller α<δ. Er α<δ har vi etter induksjonshypotesen at A;c(α) SInkl A;c(δ) og derforat A;c(α) SInkl A;c(δ+1) =A;c(β). Er α=δ har vi A;c(δ) SInkl A;c(δ)UPt(A;c(δ)) siden A;c(δ)εPt(A;c(δ)) og ¬(A;c(δ) εA;c(δ)). Men da følger: A;c(α) SInkl A;c(β).
(iii) Er βεK;II har vi A;c(β)= UN/α<β/(A;c(α)). Har vi da α<β følger det at α<δ< β for noe δεOn. Da har vi ved hjelp av induksjonshypotesen at
A;c(α) SInkl A;c(δ) Inkl UN/α<β/(A;c(α)) = A;c(β). **QED**.

Teorem 8.36 (a) (Aα)(Set(M(α))
(b) (Aα)(Aβ)(α<β → M(α) SInkl M(β))

© 2012 Morten Harboe Rognes

Bevis: Beviset for denne sats er helt analogt med beviset for Teorem 8.31 og beviset for Teorem 8.35. Leseren kan selv skrive det opp etter forbildet av de nevnte tidligere bevis. **QED**.

Teorem 8.37 (a) A;c(α)εA;c(α+1) (b) M(α) εM(α+1)

Bevis: *Ad (a)*: A;c(α) Inkl A;c(α) og Set(A;c(α)). Da At(A;c(α)) og følgelig A;c(α)εPt(A;c(α)) Inkl A;c(α+1). Ad (b): M(α) Inkl & Set(M(α)). Da M(α)εPt;m(M(α)) Inkl M(α+1). **QED**.

Teorem 8.38 (Aα)(M(α) Inkl A;c(α))

Bevis: Bevises ved induksjon på α. (i) α=0. Da har vi M(α)=ø=A;c(α). I dette tilfellet holder satsen. (ii) Anta satsen holder for alle α<β og at β=δ+1. Da har vi:

(1) M(β) = M(δ+1) = M(δ)U Pt;m(M(δ))
(2) A;c(β) = A;c(δ)U Pt(A;c(δ))

Ved hjelp av induksjonshypotesen har vi: (3) M(δ) Inkl A;c(δ). Anta xεM(β) da har vi enten xεM(δ). Ved hjelp av (3) følger da xεA;c(δ) Inkl A;c(β). Har vi xεPt;m(δ) følger Set(x) & x Inkl M(δ) Inkl A;c(δ). Siden vi i dette tilfellet har At(x) følger xεPt(A;c(δ)). Men da xεA;c(β). I begge tilfelle har vi M(β) Inkl A;c(β). (iii) βεK;II. Da har om xεM(β) at xεUN/α<β/(M(α)) og derfor xεM(α) for noe α. Etter induksjonshypotesen har vi da xεA;c(α) og derfor xε UN/α<β/A;c(α) = A;c(β). **QED**.

Bemerkning. Man bør legge merke til at vi ikke uten ytterligere aksiomer kan bevise M(α) SInkl A;c(α), med andre ord at det finnes attributter som ikke er mengder. Fra en modellteoretisk synsvinkel innebærer M(α) SInkl A;c(α) at mengden av mulige verdener inneholder mer enn ett element. I denne sammenheng kan det også nevnes at formelen (A) (Ax)(Set(x) ↔ At(x)) har som konsekvens at man kan vise L-Det(α) for alle formler α, dvs. at alle modale distinksjoner i MZFC viskes ut. MZFC utvidet med A er derfor i det vesentlige det samme systemet som ZFC.

Teorem 8.39 (Ax)(xεM(α) → Set(x)

Bevis: (i) Dette vises ved induksjon på α. (i) Er α=0 har vi M(α)=ø . Satsen holder da trivielt. (ii) α=β+1. I så fall har vi M(α)= M(β)UPt;m(M(β). Er da xεM(α) har vi xεM(β)v xεPt;m(M(β). I det første tilfellet har vi Set(x) i kraft av induksjonshypotesen. I det andre tilfelle har vi xInkl M(β) & Set(x). Da også har vi åpenbart at Set(x). (iii) αεK;II. Da har vi M(α)= UN/β<α/(M(α)). Er da xεM(α) har vi xεM(α) for noe α<β. Da følger Set(x) ved hjelp av induksjonshypotesen. **QED**.

Man bør bemerke at man ikke kan vise det omvendte av Teorem 8.38. Grunnen er at en mengde kan inneholde egenskaper som ikke er mengder.

Teorem 8.40 (a) (Ax)(Ay)(xεyεA;c(α) → xεA;c(α))
(b) (Ax)(xε A;c(α) → Pt(x) Inkl A;c(α))
(c) (Ax)(Ay)(xεy & yε M(α) → xεM(α))
(d) (Ax)(xε M(α) → Pt;m(x) Inkl M(α))

© 2012 Morten Harboe Rognes

Bevis: *Ad (a)*: Satsen bevises ved induksjon på α. (i) Anta α=ø. Da har vi A;c(0)=ø. I dette tilfelle holder satsen trivielt. (ii) α=β+1. Anta xεy & yεA;c(α). Da har vi yεA;c(β) U Pt(A;c(β). Tilfelle 1: yεA;c(β). Siden xεy har vi da ved hjelp av induksjonshypotesen at xε y& yεA;c(β) Inkl A;c(β+1) = A;c(α). Tilfelle 2: yεPt(A;c(β)). Da har vi y Inkl A;c(β) og derfor siden xεy at xεA;c(β) Inkl A;c(β+1) = A;c(α).

(iii) Vi har at αεK;II. Da har vi om xεyεA;c(α) at yεA;c(β) for noe β<α. Det følger da ved hjelp av induksjonshypotsen at xεA;c(β) Inkl UN/β<α/(A;c(β)) = A;c(α). Dette viser at punkt (a) holder.

Ad (b): Også dette bevises ved induksjon på α. (i) Anta α=0. Man ser da umiddelbart at satsen holder. (ii) Anta α=β+1 og at xεA;c(α). Da har vi xε A;c(β) U Pt(A;c(β)). Tilfelle 1: xε A;c(β). Siden β<α har vi da etter induksjonshypotesen at Pt(x) Inkl A;c(β). Det følger i såfall at Pt(x) Inkl A;c(β) Inkl A;c(α). Tilfelle 2: xε Pt(A;c(β)). Da har vi etter definisjonen av Pt at x Inkl A;c(β) & At(x). Det følger da at Pt(x) Inkl Pt(A;c(β)) og derfor at Pt(x) Inkl A;c(β) U Pt(A;c(β)) = A;c(α). Påstanden holder altså i begge tilfelle.

(iii) Anta αεK;II. og at x εA;c(α). Da har vi per definisjon xεA;c(β) for noe β<α. Etter induksjonshypotesen har vi da Pt(x) Inkl A;c(β) Inkl UN/β<α/(A;c(β)) = A;c(α). Dette viser at punkt (b) holder.

Ad (c) og (d): Beviset for punkt (c) blir helt analogt med beviset for punkt (a). Tilsvarende føres beviset for punkt (d) på akkurat samme måte som beviset for punkt (b). Detaljene her kan overlates til leseren. **QED**.

§9 Om ZFC's konsistens relativt til MZFC. En intepretasjon av L;ê inn i L;a

I dette avsnittet skal vi gi et bevis for at ZFC, slik vi beskrev dette systemet i §5, kan intepreteres inn i MZFC. Vi vil definere en rekursiv avbildning φ* som avbilder enhver formel i L;e på en formel i L;a. Vi vil så vise at denne avbildningen φ* overfører ethvert teorem i ZFC til et teorem i MZFC. Avbildningen defineres slik at dersom α;1, ...,α;n er et bevis for formelen α;n i ZFC vil φ*(α;1), ..., φ*(α;n) være et bevis for φ*(α;n) i MZFC. Siden vi også kan vise at φ*(α&¬α) = φ*(α) & ¬φ*(α) følger det at dersom man kan konstruere et bevis for en formel av typen β&¬β i ZFC, kan vi også konstruere et bevis for formelen φ*(β)& ¬φ*(β) i MZFC. Dette impliserer at dersom MZFC er konsistent må ZFC også være det, med andre ord viser vi at ZFC er konsistent relativt til MZFC. Siden vi i §5 viste det omvendte, nemlig at MZFC er konsistent relativt til ZFC, følger det at MZFC er *ekvikonsistent* med ZFC.

Vi skal nå definere denne avbildningen φ*. Det er hensikts messig å ha til rådighet en forkortelse for uttrykket "(Eα)(xεM(α)". Vi skal i denne forbindelse benytte uttrykket "M;c(x)". Denne forkortningskonvensjonen kan formuleres i form av en definisjon på følgende måte:

Definisjon 9.1 M;c(x) ↔ (Eα)(xεM(α))

Vi definerer først φ: Fm(L;ê) → Fm(L;a) på følgende vis:

Definisjon 9.2 (a) Avbildningen φ av FM(L;ê) inn i Fm(L;a) er induktivt definert på lengden av formler i L;ê på følgende måte:

(i) φ(xêy) = M;c(x) & M;c(y) & xεy

© 2012 Morten Harboe Rognes

(ii) $\varphi(x=y) = M;c(x) \,\&\, M;c(y) \,\&\, x=y$
(ii) Er α,β formler i L;ê setter vi:
$\varphi(\alpha q \beta) = \varphi(\alpha)\ q\ \varphi(\beta)$ om q er enten v, &, →, ↔
$\varphi(\neg\alpha) = \neg\varphi(\alpha)$
(iii) Er α en formel i L;ê setter vi
$\varphi((Ax)\alpha) = (Ax)(M;c(x) \rightarrow \varphi(\alpha)$
(iv) Er α en formel i L;ê setter vi:
$\varphi((Ex)\alpha) = (Ex)(M;c(x) \,\&\, \varphi(\alpha))$
(b) Er α en formel med x;1, ..., x;n som fri variabler setter vi
$\varphi^*(\alpha) = (Konj/i,1,n/(M;c(x;i)) \rightarrow \varphi(\alpha))$

Dermed er funksjonen φ^* fullstendig definert. Det resultatet vi skal vise i denne paragrafen kan nå, i det vi bruker "S |- α" som forkortelse for " formelen α er et teorem i systemet S, formuleres slik:

Teorem 9.1 $\alpha\varepsilon Fm(L;ê) \,\&\, ZFC \vdash \alpha \rightarrow MZFC \vdash \varphi^*(\alpha)$

Denne satsen bevises ved induksjon på mengden av teoremer i ZFC. Vi viser først at $\varphi(\alpha)$ er et teorem i MZFC om α er et av aksiomene i ZFC. Dernest viser vi at slutningsreglene i ZFC, det dreier seg kun om to, nemlig modus ponens og universell generalisering, bevarer gyldighet. Det er lett å innse dette. Har vi at α,β er to formler i L;ê der β er sluttet fra α og $\alpha\rightarrow\beta$ i overenstemmelse med modus ponens ser man at $\varphi^*(\beta)$ også må kunne sluttes fra $\varphi^*(\alpha)$ og $\varphi^*(\alpha\rightarrow\beta)$. Tilsvarende om α er en formel i L;ê og vi har at $(Ax)\alpha$ er utledet fra α ved hjelp av universell generalisering. Man ser da relativt lett at $\varphi^*((Ax)\alpha)$ lett kan utledes fra $\varphi^*(\alpha)$ ved hjelp av slutningsreglene i MZFC.

For å vise at $\varphi^*(\alpha)$ er et teorem i MZFC om α er et aksiom i ZFC må man naturligvis vise at dette gjelder for alle aksiomene i ZFC. Dette innebærer at man må vise dette for de setningslogiske aksiomene, de predikatlogiske aksiomene, de identitetsteoretiske aksiomene og alle de mengdeteoretiske aksiomene. Når det gjelder de tre første aksiomtypene vil vi gå forholdsvis lett over dem. Er for eksempel β et predikatlogisk aksiom av typen $(Ax)(\alpha\rightarrow\lambda) \rightarrow \alpha \rightarrow (Ax)\lambda$ der x ikke forekommer fri i α er det ikke vanskelig å innse at $\varphi^*(\beta)$ er utledbar i MZFC. Tilsvarende for instanser av de andre predikatlogiske aksiomene. Når det gjelder de setningslogiske aksiomene er det like lett å se at φ^* overfører disse til teoremer i MZFC. Tilsvarende når det gjelder de identitetsteoretiske aksiomene.

Når det gjelder de mengdeteoretiske aksiomene tar vi for oss disse i full detalj i §9.1 - §9.10. Dette er, når man skal gjennomføre bevisene detaljert, en ganske langtekkelig affære, men det er nødvendig om man ønsker å gi et fullstendig bevis.

I de følgende paragrafer trenger vi den følgende sats:

Lemma 9.1 (a) $\alpha ê\ Fm(L;ê) \rightarrow MZFC \vdash L\text{-}Det(\varphi(\alpha))$
(b) $\alpha ê\ Fm(L;ê) \rightarrow MZFC \vdash L\text{-}Det(\varphi^*(\alpha))$

Vi skal ikke gjennomføre noe detaljert bevis for denne påstanden akkurat her. Den bevises ved induksjon. Det er ikke spesielt vanskelig å gjennomføre beviset om man husker på at man har $L\text{-}Det((E\beta)(x\varepsilon M(\beta))$, det vil si at $L\text{-}Det(M;c(x))$, og dessuten bruker Teorem 6.10.

Vi går nå over til å verifisere at φ^* overfører de enkelte mengdeteoretiske aksiomene i ZFC til teoremer i MZFC. Vi starter med ekstensjonalitetsaksiomet.

© 2012 Morten Harboe Rognes

§9.1 Ekstensjonalitetsaksiomet

Ekstensjonalitetsaksiomet i ZFC er den følgende formel:

$\beta = (Az)(z\hat{e}x \leftrightarrow z\hat{e}y) \rightarrow x=y$

Man ser lett ved hjelp av definisjonen av φ* at φ* er ekvivalent med den følgende formel i L;a:

(1) $M;c(x) \,\&\, M;c(y) \,\&\, (Az)(M;c(z) \,\&\, x\varepsilon z \,\&\, M;c(x) \leftrightarrow M;c(z) \,\&\, y\varepsilon z \,\&\, M;c(y)). \rightarrow M;c(z) \,\&\, x=y \,\&\, M;c(x)$

Det er ikke vanskelig å vise at denne formelen er ekvivalent i MZFC med:

(2) $M;c(x) \,\&\, M;c(y) \,\&\, (Az)(z\varepsilon x \leftrightarrow z\varepsilon y) \rightarrow x=y$

La oss vise at (2) holder: Anta derfor (3) $M;c(x) \,\&\, M;c(y)$ og (4) $(Az)(z\varepsilon x \leftrightarrow z\varepsilon y)$. Fra (3) følger siden $M;c(x) \leftrightarrow (E\alpha)(\alpha\varepsilon M(\alpha))$ at $(E\alpha)(x\varepsilon M(a))$. Fra dette og Teorem 8.39 har vi (5) Set(x) og derfor At(x). Tilsvarende følger fra den andre konjunkten i (3) at (6) Set(y). Vi har derfor (7) At(x) &At(y). Fra (4), (5) og (6) følger (8) Nec((Az)(zεx ↔ zεy)). Fra dette, (7) og TA11, "den intensjonale versjonen av ekstensjonalitetsaksiomet" har vi så at x=y. Dette viser at (2) holder og at vi derfor har: MZFC|- φ*(β).

§9.2 Utsondringsaksiomet

Utsondringsaksiomet i ZFC er den følgende formel i L;ê:

(1) $\alpha = (Ey)((Ax)(x\hat{e}y \leftrightarrow x\hat{e}z \,\&\, F(x)))$.

Her forutsettes det naturligvis at variabelen y ikke forekkommer fri i F og at F er en formel i L;ê. Ved hjelp av definisjonen av φ ser man lett at

(2) $\varphi(\beta) = (Ey)(M;c(y) \,\&\, (Ax)(M;c(x) \rightarrow (M;c(x) \,\&\, x\varepsilon y \,\&\, M;c(y). \leftrightarrow. M;c(x) \,\&\, x\varepsilon z \,\&\, M(z) \,\&\, \varphi(F(x)))))$

Fra dette og definisjonen av φ*(β) ser man at $\varphi^*(\beta) = M;c(z) \rightarrow \varphi(\beta)$. Herav utleder man lett at

(3) $\varphi^*(\beta) \leftrightarrow. M;c(z) \rightarrow (Ey)(M;c(y) \,\&\, (Ax)(x\varepsilon y \leftrightarrow x\varepsilon z \,\&\, \varphi(F(x))))$.

Vi ønsker å vise at φ*(β) er et teorem i MZFC. Det vil være tilstrekkelig å vise:

(4) $M;c(z) \rightarrow M;c(\{x: x\varepsilon z \,\&\, \varphi(F(x))\})$

Anta derfor for vilkårlig z at (5) M;c(z). Da har vi etter definisjonen av M;c at $(E\alpha)(z\varepsilon M(\alpha))$ og derfor ved hjelp av et tidligere teorem at (6) Set(z). Fra dette følger etter definisjonen av Set at (7) At(z). Herav har vi så ved hjelp av TA18 at

(8) $At(\lambda x(x\varepsilon z \,\&\, \varphi(F(x))))$ Fra dette følger

(9) $At(\{x: x\varepsilon z \,\&\, \varphi(F(x))\})$. Siden Set(z) har vi L-Det(xεz) og siden vi ved hjelp av Lemma 9.1 har at L-Det(φ(F(x)) følger (10) L-Det(xεz & φ(F(x))). Dette innebærer at $Det(\{x: x\varepsilon z \,\&\, \varphi(F(x))\})$ og derfor sammen med (9) at (11) $Set(\{x: x\varepsilon z \,\&\, \varphi(F(x))\})$.

Sett per definisjon $a = \{x: x\varepsilon z \,\&\, \varphi(F(x))\}$. Da har vi åpenbart

(12) a Inkl z & Set(a). Fra (5) har vi per definisjon av M;c at

(13) zεM(α) for noe α. Det følger da ved hjelp av Teorem 8.40 at

(14) Pt;m(z) Inkl M(α). Men fra (12) har vi aεPt;m(z) og derfor at aεM(α) ved hjelp av (14). Det følger at M;c(a) og derfor $M;c(\{x: x\varepsilon z \,\&\, \varphi(F(x))\})$. Dette viser at (4) holder. Vi har dermed vist MZFC|- φ*(β), med andre ord at φ* avbilder utsondringsaksiomet i ZFC på et teorem i MZFC.

§9.3 Nullmengdeaksiomet

Nullmengdeaksiomet i ZFC er den følgende formel i L;e:$(Ey)((Ax)(x\hat{e}y \leftrightarrow x\neq x))$ Med andre ord dreier det seg om aksiomet M2 i §5. Siden denne formelen umiddelbart følger fra utsondringsaksiomet i ZFC følger det at φ* avbilder denne formelen på et teorem i MZFC. Det er derfor strengt tatt unødvendig å gi noe bevis for:

© 2012 Morten Harboe Rognes

MZFC |- φ*((Ey)((Ax)(xêy ↔ x≠x))).

§9.4 Parmengdeaksiomet

Parmengdeaksiomet i ZFC er formelen M3 i §5, med andre ord den følgende formel:

(1) α =(Ey)((Ax)(xêy ↔ x=z v x=w))

Fra definisjonen av φ* fremgår det at φ*(α) er ekvivalent med den følgende formel

(2) M;c(z) & M;c(w) → (Ey)(M;c(y) &
(Ax)(M;c(x) → (M;c(x)&xεy & M;c(y) ↔ x=z v x=w)))

Det er videre ganske lett å se at (2) er ekvivalent med den følgende formel:

(3) M;c(z) & M;c(w) → (Ey)(M;c(y) & (Ax)(xεy ↔ x=z v x=w))

Det vil derfor være tilstrekkelig å vise at (3) er et teorem i MZFC.. Anta derfor (4) M;c(z) & M;c(w). Da følger ved hjelp av Teorem 8.39 at (5) Set(z) & Set(w). Herav har man at (6) Set({z,w}). Det vil være tilstrekkelig å vise at (+) M({z,w}). Dette impliserer jo at det finnes y der M;c(y) & y={z,w} og derfor M;c(y) & (Ax)(xεy↔ x=z v x=w).
Fra (4) og definisjonen av M;c følger det at det finnes δ og λ slik at

(7) zεM(δ) & wεM(λ). Sett α=UN({δ,λ}). Da har vi ved hjelp av Teorem 7.23 at (8) δ,λ =< α og derfor ved hjelp av Teorem 8.36 og (7) at z,wεM(α). Da har vi åpenbart at {z,w} Inkl M(α). Fra dette og (6) følger videre {z,w}εPt(M(α)) Inkl M(α+1). Det følger at (Eβ)({z,w}εM(β)) . Herav følger så (+). Dermed har vi vist at φ* avbilder parmengdeaksiomet i ZFC på et teorem i MZFC.

§9.5 Replacementaksiomet

La oss studere replacementaksiomet i ZFC, formelen M9 i §5. Dette er den følgende formel:

β = (Ax)(Ay)(Az)(F(x,y) & F(x,z) → y=z) →
(Ea)((Ax)(xêa ↔ (Ew)(wêb & F(w,x))))

Vi har i dette tilfelle at φ*(β) er ekvivalent med den følgende formel:

(1) (Ax)(Ay)(Az)(M;c(x) & M;c(y) & M;c(z) & φ(F(x,y)) & φ(F(x,z). → y=z)]
→. M;c(b) → (Ea)(M;c(a) & (Ax)(M;c(x)→ (xεa ↔
(Ew)(M;c(w) & wεb & φ(F(w,x)))))

Vi må bevise at MZFC |- (1). Definer nå G ved:

(2) G = {<x,y>: M;c(x) & M;c(y) & φ(F(w,x))}

Det vil være tilstrekkelig å bevise (+) Det(G) & Un(G) & M;c(b) → M;c(G"b).

La oss først vise at (+) impliserer (1) før vi viser at (+) selv holder. Anta derfor at antesedenten i (1) holder. Fra dette og definisjonen av G, ie. (2), følger at G er entydig, det vil si at (3) Un(G). Siden vi åpenbart har L-Det(M;c(x) & M;c(y) & φ(F(x,y)) har vi (4) Det(G). Fra (+), (3), (4) og antesedenten i konsekventen i (1), ie. M;c(b) følger (5) M;c(G"b). Dette impliserer at det finnes a slik at (6) a= G"b & M;c(a). Fra dette følger:

(7) (Ea)(M;c(a) & (Ax)(xεa ↔ (Ez)(zεb & M;c(z)& M;c(x) & φ(F(z,x)))))

Det er temmelig lett å se at (7) impliserer den konsekventen i konsekventen i (1). Dette viser at (+) impliserer (1).

La oss nå vise at (+) holder. Anta (8) Det(G) & Un(G) & M;c(b). Da har vi ved hjelp av definisjonen av G, siden (Ax)(M;c(x) → Set(x), at (9) G Inkl {x:Set(x)}^2
Det vil være tilstrekkelig å bevise at (++) {G(x):xεb}εM(λ) for noe λ. Sett per definisjon:

(10) λ0 = UN({SN({α: G(x)εM(α)}): xεb})+1 Vi må ha λ0εOn

Videre har vi, om xεb at G(x)εM(SN({α: G(x)εM(α)})). Derfor:

(11) (Ax)(xεb → SN({α: G(x)εM(α)}) < λ0). Det følger at

(12) (Ax)(xεb → G(x)εM(λ0))

© 2012 Morten Harboe Rognes

Dette innebærer at (13): {G(x):xεb} Inkl M(λ0). Siden Set({G(x):xεb}) har vi {G(x):xεb} ε M(λ0+1). Men fra dette følger (++). Vi har dermed vist at (+) holder. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for at φ* avbilder replacementaksiomet i ZFC på et teorem i MZFC.

§9.6 Sumaksiomet

Vårt neste mål er å vise at intepretasjonen av sumaksiomet i ZFC, formelen M5 i §5, er et teorem i ZFC. Sumaksiomet er den følgende formel:

(1) $\beta = (Ey)((Ax)(x\hat{e}y \leftrightarrow (Ez)(x\hat{e}y \,\&\, y\hat{e}z)))$

Vi har at φ*(β) er ekvivalent med:

(2) $M;c(a) \rightarrow (Ey)(M;c(y)\,\&\,(Ax)(M;c(x) \rightarrow (x\varepsilon y \leftrightarrow (Ez)(M;c(z)\,\&\,x\varepsilon z\,\&\,z\varepsilon a))))$

Det er tilstrekkelig å vise at

(+) $M;c(a) \rightarrow M;c(UN(a))$.

La oss først vise at (+) impliserer (2). Anta (3) M;c(a). Da har vi ved hjelp av (+) at M(UN(a)). Fra dette følger at det finnes α slik at $UN(a)\varepsilon M(\alpha)$. Da må det finnes y slik at (4) M;c(y) & y=UN(a). Herav følger

(5) $M;c(y)\,\&\,(Ax)(x\varepsilon y \leftrightarrow (Ez)(x\varepsilon z\,\&\,z\varepsilon y))$. Anta for vilkårlig x at M;c(x) & xεy. Da har vi ved hjelp av (5) at xεz & zεy for noe z. Siden M;c(y) følger at M;c(z). Herav (Ez)(M;c(z) & xεz & zεa). Anta på den annen side at M;c(x) og (Ez)(M;c(z) & xεz & zεa). Da følger umiddelbart ved hjelp av (5) at xεy. Man ser at (5) impliserer konsekventen i (2). Dette viser at (+) impliserer (2)

La oss så vise at (+) holder. Anta (6) M;c(a). Da har man (7) $a\varepsilon M(\alpha)$ for noe α. Anta nå $x\varepsilon UN(a)$. Det følger at det finnes z slik at xεz & zεa. Fra dette og (7) følger ved hjelp av Teorem 8.40 at $z\varepsilon M(\alpha)$. Siden xεz følger ved hjelp av det samme teorem at $x\varepsilon M(\alpha)$. Vi har altså at (8) UN(a) Inkl M(α). Videre har fra (7) at (9) Set(a). Siden $a\varepsilon M(\alpha)$ har vi også for vilkårlig yεa at $y\varepsilon M(\alpha)$ og derfor Set(y). Det følger at (10) (Ay)(yεa →Set(y)) Fra (9) og (10) kan man slutte at Set(UN(a)). Fra dette og (8) følger $UN(a)\varepsilon Pt(M(\alpha))$ Inkl M(α+1). Det følger at $(E\beta)(UN(a)\varepsilon M(\beta))$ og derfor M;c(UN(a)). Dette viser at (+) holder. Dermed har vi levert et bevis for at φ* avbilder sumaksiomet på et teorem i MZFC.

§9.7 Potensmengdeaksiomet

Potensmengdeaksiomet, formelen M6 i §5, er

$\beta = (Ey)((Ax)(x\hat{e}y \leftrightarrow (Az)(z\hat{e}x \rightarrow z\hat{e}w)))$

Vi har at φ*(β) er den følgende, ganske kompliserte, formel:

(2) $M;c(w) \rightarrow (Ey)(M;c(y)\,\&\,(Ax)(M;c(x)\&M;c(y)\,\&\,x\varepsilon y \leftrightarrow (Az)(M;c(z)\,\&\,M;c(x)\,\&\,z\varepsilon x \rightarrow M;c(z)\,\&\,M;c(w)\,\&\,z\varepsilon w)))$

Denne formelen er i sin tur implisert av:

(3) $M;c(w) \rightarrow (Ey)(M;c(y)\,\&\,(Ax)(M;c(x) \rightarrow (x\varepsilon y \leftrightarrow (Az)(M;c(z)\,\&\,z\varepsilon x \rightarrow z\varepsilon w))))$

For å bevise (3) er det tilstrekkelig å vise

(+) $M;c(w) \rightarrow M;c(Pt;m(w))$

Vi skal først vise at (+) impliserer (3). Anta (4) M;c(w). Fra dette og (+) følger M;c(Pt;m(w)). Fra dette kan man slutte at det finnes y slik at M;c(y) & y=Pt;m(w). Dette impliserer i sin tur at (5) M;c(y) & (Ax)(xεy ↔ (Set(x) & x Inkl w). Herav (6) (Ax)(xεy ↔. Set(x) & Nec((Az)(zεx → zεw))). Anta nå for vilkårlig x,z at (7) M;c(x) & xεy & M;c(z) & zεx. Fra dette og (6) følger åpenbart zεw. Vi har derfor

(8) (Ax)(M;c(x) →. xεy → (Az)(M;c(z) & zεx → zεw)). Anta på den annen side for

© 2012 Morten Harboe Rognes

vilkårlig x at (9) M;c(x) & (Az)(M;c(z) & zεx → zεw). Da har vi ved hjelp av Teorem 8.39 at (10) Set(x). Videre følger det fra (4) at (11) Set(w). Anta nå for vilkårlig z at zεx. Fra dette og den første konjunkten i (9) samt Teorem 8.40 følger M;c(z) & zεx. Fra dette og den andre konjunkten i (9) har vi zεw. Vi har derfor (Az)(zεx→zεw). Fra dette sammen med (9) og (10) følger Nec((Az)(zεx → zεw)). Fra dette, (10) og (6) følger så xεy. Vi har nå vist

(11) (Ax)(M;c(x) →. (Az)(M;c(z) & zεx → zεw) → xεy))

Fra (5), (8) og (11) følger konsekventen i (3). Vi har dermed vist at (+) impliserer (3)

La oss så vise at (+) holder. Anta (12) M;c(w). Da har man (13) wεM(α) for noe α Fra dette og Teorem 8.40 følger (14) Pt;m(w) Inkl M(α). Fra (13) følger også Set(w) og derfor at Set(Pt;m(w)). Fra dette og (14) følger Pt;m(w)εPt(M(α)) Inkl M(α+1). Vi har altså at (Eβ)(Pt;m(w)εM(β)) og derfor M;c(Pt;m(w)). Dette viser at (+) holder. Dermed har vi vist at φ* avbilder potensmengdeaksiomet i ZFC på et teorem i MZFC.

§9.8 Uendelighetsaksiomet

Uendelighetsaksiomet, formelen M7 i §5 er :

β = (Ey)((Ez)(zêy &(Ax)(xêz ↔ x≠x)) &
(Ax)(xêy → (Ez)(zêy & (Ar)(rêz ↔ rêx v r=x))))

Man har at φ*(β) er ekvivalent med:

(1) (Ey)(M;c(y) & (Ez)(zεy &(Ax)(xεz ↔ x≠x)) &
(Ax)(xεy → (Ez)(zεy & (Ar)(rεz ↔ rεx v r=x))))

Leseren kan selv sjekke denne påstanden. Vi skal vise

(2) M;c(ω)

Dette vil være tilstrekkelig. Vi har tidligere bevist (3) øεω og (4) (Ax)(xεω → Set(x)) Nå har vi i kraft av definisjonen av det kumulative mengdehierarki at

(5) ø = M(0) og derfor at øεM(1) Inkl M(ω). Vi har altså (6) øεM(ω)

Anta nå at xεM(ω). Da har vi xεM(α) for noe α<ω. Da følger x Inkl M(α), men også {x} Inkl M(α). Det følger at xU{x} Inkl M(α). Siden Set(xU{x}) følger det at xU{x}εPt;m(M(α)) Inkl M(α+1). Siden ωεK;II og α+1 <ω har vi derfor at xU{x}εM(ω). Vi har derfor vist:

(6) (Ax)(xεM(ω) → xU{x}εM(ω))

Fra dette og (6) følger ved induksjon at ω Inkl M(ω) og derfor at ωεPt;m(ω) εM(ω+1). Vi har derfor (Eβ)(ωεM(β)). Det følger at (2) holder.

Vi har naturligvis at (7) øεω og derfor

(8) (Ez)(zεω & (Ax)(xεz↔x≠x)).

Videre har vi (Ax)(xεω → xU{x}εω). Herav følger:

(9) (Ax)(xεω → (Ez)(zεω & (Ar)(rεz ↔ rεx v r=x)))

Man ser at (1) følger fra (2), (8) og (9). Dette viser at φ* avbilder uendelighetsaksiomet i ZFC på et teorem i MZFC.

§9.9 Fundierungsaksiomet

Fundierungsaksiomet, aksiomet M8 i §5, er den følgende formel i L;ê:

β = (Ax)((Ey)(yêx) → (Ez)(zêx & ¬(Ew)(wêz & wêx)))

Man har, noe som det burde være relativt enkelt for leseren å verfisere, at φ*(β) er ekvivalent (i MZFC) med den følgende formel:

(1) (Ax)(M;c(x) & (Ey)(yεx) → (Ez)(zεx & ¬(Ew)(wεz & wεx)))

Siden vi vi har at M;c(x) impliserer Set(x) som i sin tur impliserer At(x), følger (1) umiddelbart fra den versjonen av Fundierungsaksiomet som inngår i MZFC, det vil si

© 2012 Morten Harboe Rognes

aksiomet TA24. Dette viser at MZFC |- φ*(β).

§9.10 Utvalgsaksiomet

Vi har at utvalgsaksiomet i ZFC, aksiomet M10 i §5, er den følgende formel i L;ê:

β = (Ey)(yêx)& (Ay)(yêx → (Ez)(zêy)) &
(Az)(Aw)(z,wêx → z=w v ¬(Er)(rêz&rêw)).
→ (Eu)((Ay)(yêx ↔ (Ev)(As)(sêu & sêy ↔ s=v)))

Vi har at φ*(β) er ekvivalent med den følgende formel i L;a:

(1) M;c(x) & (Ey)(yεx)& (Ay)(yεx → (Ez)(zεy)) &
(Az)(Aw)(z,wεx → z=w v ¬(Er)(rεz&rεw)).
→ (Eu)(M;c(u) & (Ay)(yεx ↔ (Ev)(M;c(v) &(As)(sεu & sεy ↔ s=v)))

Det er nødvendig å vise at (1) er et teorem i MZFC. Anta derfor at antesedenten i (1) holder, med andre ord at:

(2) M;c(x) & (Ey)(yεx)& (Ay)(yεx → (Ez)(zεy)) &
(Az)(Aw)(z,wεx → z=w v ¬(Er)(rεz&rεw)).

Har man M;c(x) følger ved hjelp av Teorem 8.39 at Set(x). Herav kan ved hjelp av definisjonen av Set slutte at At(x). Fra (2) følger derfor:

(3) At(x) & (Ey)(yεx)& (Ay)(yεx → (Ez)(zεy)) &
(Az)(Aw)(z,wεx → z=w v ¬(Er)(rεz&rεw)).

Fra dette og TA27 følger at det finnes v0 slik at

(4) At(v0) & (Ay)(yεx ↔ (Eu)(At(u) &(As)(sεv0 & sεy ↔ s=u)))

Fra (2) følger selvfølgelig (5) M;c(x). Herav følger som nevnt (6) Set(x). Men det følger også ved hjelp av Teorem 8.40 at (7) (Az)(zεx → Set(z)). Fra (6) og (7) kan man slutte at Set(UN(x)) og siden M;c(x) følger det at (8) M;c(UN(x)). Fra den første konjunkten i (4) følger ved hjelp av TA16 at det finnes v1 slik (9) Set(v1) & (Ax)(xεv1 ↔ xεv0)
Definer v2 ved å sette (10) v2= v1Ω UN(x). Da har vi Set(v1Ω Un(x)). Nå har man videre (11) v1ΩUN(x) Inkl UN(x) og derfor i lys av (8) M;c(v1ΩUN(x)) og derfor

(12) M;c(v2). Anta nå for vilkårlig y at (13) yεx. Da følger ved hjelp av (4) at det finnes noe u der vi har (14) At(u) &(As)(sεv0 & sεy ↔ s=u). Herav følger (15) uεv0 & uεy. Siden uεyεx i lys av (13) og vi fra (5) har M;c(x) følger ved hjelp av Teorem 8.40 at (16) M;c(u). Anta nå for vilkårlig s at sεv2 & sεy da har vi sεv1ΩUN(x) og derfor sεv1 da har vi sεv0&sεy i lys av (9) og derfor ved hjelp av (14) at s=u. Anta på den annen side at s=u. Da følger ved hjelp av (14) sεv0 & sεy. Da har vi ved hjelp av (9) at sεv1 & sεy og derfor i lys av (10) at sεv2 &sεy. Vi har nå vist:

(17) (As)(sεv2 &sεy ↔ s=u). Fra dette og (16) følger:
(18) M;c(u) & (As)(sεv2 &sεy ↔ s=u) og derfor
(19) (Eu)(M;c(u) & (As)(sεv2 &sεy ↔ s=u))

Nå var y vilkårlig objekt slik at (13). Vi har derfor vist:

(20) (Ay)(yεx → (Eu)(M;c(u) & (As)(sεv2 &sεy ↔ s=u))). Fra dette og (12) følger:
(Eu)(M;c(u) & (Ay)(yεx ↔ (Ev)(M;c(v) &(As)(sεu & sεy ↔ s=v)))

Dette er konsekventen i (1). Vi har dermed vist at (1) som er ekvivalent med φ*(β) er et teorem i MZFC. Det følger at φ*(β) også er et teorem i MZFC.

§9.11 Konklusjon

Vi har nå vist at intepretasjonsfunksjonen φ* overfører alle de rent mengdeteoretiske

© 2012 Morten Harboe Rognes

aksiomene i ZFC på teoremer i MZFC. Vi har tidligere påpekt at φ* også avbilder alle de setningslogiske aksiomene, alle de predikatlogiske aksiomene og alle de identitetslogiske aksiomene på teoremer i MZFC. Endelig er det slik at at dersom en formel α i ZFC er sluttet fra visse andre β;1 ... β;n i henhold til modus ponens eller universell generalisering kan vil også φ*(α) kunne sluttes fra φ*(β;1), ..., φ*(β;n) i MZFC. Vi har derfor at φ* avbilder ethvert teorem i ZFC på et teorem i MZFC. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for Teorem 9.1 i §9. Det følger at dersom det kan utledes en motsigelse i ZFC kan det også utledes en motsigelse i MZFC. Vi har med andre ord vist at ZFC er konsistent relativt til MZFC. Siden vi i §5 og dens underparagrafer viste at MZFC er konsistent relativt til ZFC følger det at vi nå har vist at de to systemene er ekvikonsistente. Siden det meste av klassisk matematikk kan utvikles innenfor rammen av ZFC har vi også i prinsippet vist hvordan den klassiske matematikk kan utvikles innenfor rammen av egenskapsteorien MZFC.

§10 Det kumulative egenskapshierarki og standardmodellen for L;a

I det følgende arbeider vi fullstendig innenfor rammen av ZFC slik dette systemet er fremstilt i Takeuti & Zaring [1]. Notasjon og begrepsdannelser av mengdeteoretisk natur som vi ikke definerer vil være definert på samme måte som i dette arbeidet. Vi bemerker at ê i dette avsnittet og de følgende betegner medlemskapsrelasjonen mellom mengder. "xêy" uttrykker at x er et element i mengden y. Vi minner også dersom x og y er mengder betegner x^y mengden av alle de funksjoner f der domenet til funksjonen er y og hvor verdiområdet til f er inkludert i x. Mengdeabstraksjonstermer innføres på samme måte som i Takeuti & Zaring [1]. Er A en mengdeabstraksjonsterm betyr M(A) at A er en mengde. "M(A)" er definert som "(Ex)(x= A)".

I det følgende skal vi anta at I er en ikke-tom mengde som representerer mengden av mulige verdener. Det er meningen at I kan defineres innenfor mengden av ZFC. Det ville for eksempel ikke være noe i veien for å identifisere I med mengden av de naturlige tall eller mengden av de reelle tall. Man kanforsåvidt velge ut en annen "omfangsrik" mengde. Imidlertid skal vi la dette stå åpent. Vi forutsetter i det følgende at I er en mengde som innholder minst tellbart uendelig mange elementer og at det er en mengde som eksisterer, ie. (Ex)(x=I) og Cd(I) >= ω^{21}

Det *rene kumulative mengdehierarki over I* er definert ved transfinit induksjon på følgende måte:

Definisjon 10.1
(i) A(0,I) = ø
(ii) A(α+1,I) = A(α,I) U (Pt(A(α,I))^I
(iii) A(β,I) = UN/α<β/(A(α,I))

Merk at i forbindelse med denne definisjonen bruker vi α,β,δ ..... som syntaktiske variabler som tar ordinaltall som verdier. Videre er Pt(x) mengden av alle delmengder av x, med andre ord potensmengden til x. Operasjonen Pt er nå definert på den måte som er vanlig innenfor ZFC. La oss også nevne at vi bruker "Inacc(x)" som forkortelse for "x er et utilgjengelig kardinaltall". Dette defineres på samme måte som i Takeuti & Zaring [1]. Vi bruker μα(F(α)) for å betegne det minste ordinaltall som oppfyller betingelsen F(α). Det minste utilgjengelige ordinaltall betegner vi med μ;0. Vi har altså at μ;0 er definert ved μ;0 = μα(Inacc(α)). Det

21 Merk at "Cd(x)" betyr det samme som "kardinaltallet til x".

© 2012 Morten Harboe Rognes

skulle være klart at det minste utilgjengelige kardinaltall er et grenseordinaltall. Man har altså at μ;0êK;II. Vi betegner det rene kumulative hierarki opp til det minste utilgjengelige kardinaltall med A;I. A;I kan derfor defineres slik: A;I = A(μ;0,I).

Vi kaller de enkelte elementer i A;I for egenskaper eller attributter. Man ser ganske lett at ethvert element i denne mengden A;I er en funksjon f der domenet er I og verdiområdet er inkludert i A;I. Er fêA;I og wêI kaller vi f(w) for ekstensjonen til f i verdenen w. Har man at xêf(w) sier vi at entiteten x er med i ekstensjonen til egenskapen f i verdenen w. Dette innebærer at x har, eller er i besittelse av, egenskapen f i denne verden. I det følgende finner vi det hensiktsmessig å betegne relasjonen " x er i besittelse av egenskapen y i verdenen w" med ê;(w,I). Dette innebærer at "xê;(w,I) y" betyr at x er i besittelse av egenskapen y i verdenen w. Vi gir den følgende formelle definisjon:

Definisjon 10.2 xê;(w,I) y ↔. wêI & (Eα)(xêA(α,I)) & (Eα)(yêA(α,I)) & xêy(w)

Som man ser har man at xê;(w,I)y hvis og bare hvis x, såvel som y, er elementer i det rene kumulative egenskapshierarki opp til et visst nivå, w er en mulig verden og x er med i ekstensjonen til y i verdenen w.

Teorem 10.1 wêI & xê;(w,I)y & yêA(α,I) → xêA(α,I)

Denne satsen sier at dersom y er et attributt som er et element i det kumulative hierarki på nivå α, og x er i besittelse av dette attributtet y i verdenen w, så er også x et element i hierarkiet på nivå α.

Bevis: Satsen bevises ved induksjon på α.

(i) Er α=0 har man fra definisjonen av A at A(α,I)=ø. I dette tilfellet holder satsen trivielt fordi antesedenten er usann.

(ii) Anta α=β+1 og at satsen holder for alle λ < α. Anta (1) wêI & xê;(w,I)y og yêA(α,I) = A(β,I)U Pt(A(β,I))^I. Det er da to muligheter: Tilfelle 1: yêA(β,I). Siden vi i så fall har at β<α har vi ved hjelp av induksjonshypotesen at xêA(β;I) og derfor xeA(β+1,I)= A(α,I). Tilfelle 2: yêPt(A(β,I))^I. Siden wêI har vi da at y(w) Inkl A(β,I). Siden xê(w,I)y følger xêy(w). Vi har da xêA(β,I) Inkl A(β+1,I)=A(α,I)

(iii) Anta αεK;II. Da har vi A(α,I) =UN/β<α/(A(β,I)). Anta wêI & xê;(w,I)y & yêA(α,I). Da har vi wêI & xê;(w,I)y & yêA(β,I) for noe β<α. Ved hjelp av induksjonshypotesen kan man da slutte at xêA(β,I) Inkl UN/β<α/(A(β,I))= A(α,I). **QED**.

Teorem 10.2 M(I) → (Aα)M(A(α;I))

Bevis: Også dette bevises ved induksjon på α. Anta (1) M(I). (i) α=0. Da har man at A(α,I)=ø. Da har man at M(A(α,I)) i kraft av nullmengdeaksiomet.

(ii) α=β+1. Da er (2) A(α,I) = A(β,I)U Pt(A(α,I))^I. Ved hjelp av induksjonshypotesen har man da (3) M(A(β,I)). Fra dette følger ved hjelp av potensmengdeaksiomet at (4) M(Pt(A(β,I)). Siden vi har at x^y er en mengde om x og y er det, leseren kan verifisere dette på egenhånd, kan man i kraft av (1) slutte at M(Pt(A(β,I))^I). Fra dette, (3) og sumaksiomet følger M(A(β,I) U Pt(A(α,I))^I). Herav har vi så ved hjelp av (2) at M(A(α,I)).

(iii) Anta αêK;II. Da har vi A(α,I) = UN/β<α/(A(β,I)). Nå har vi ved hjelp av induksjonshypotesen at M(A(β,I)) om β<α. Nå har man at g definert ved

© 2012 Morten Harboe Rognes

G= {<A(β,I),β>: βêα} er en funksjon og derfor kan man ved hjelp av replacementaksiomet utlede at M(G"α). Ved hjelp av foreningsmengdeaksiomet har man derfor M(UN(G"α)) og derfor M(A(α,I)) siden A(α,I) = UN(G"α) = UN/β<α/(A(β,I)). Dette viser at satsen holder. **QED**.

Teorem 10.3 (Aα)(Aβ)(α<β → A(α,I) Inkl A(β,I))

Bevis: (i) Satsen holder åpenbart om β=0.
(ii) Anta den holder for alle λ < β+1. Anta α<β+1. Da har man α<β v α=β. I det første tilfelle har man ved hjelp av induksjonshypotesen at A(α,I) Inkl A(β,I) siden β<β+1 og derfor at

A(α;I) Inkl A(β;I) Inkl A(β,I)UPt(A(β,I))^I = A(β+1,I)

Er α=β har vi åpenbart at

A(α,I) Inkl A(α,I) U Pt(A(α,I))^2
= A(β,I) U Pt(A(β,I))^2 = A(β+1,I)

(iii) Anta βεK;II og at α<β. Da har vi A(β,I) = UN/λ<β/(A(λ,I)) Da har vi umiddelbart at A(α,I) Inkl UN/λ<β/(A(λ,I)) = A(β,I). **QED**.

I det følgende skriver vi "A(α)" istedet for "A(α,I)". Vi tar altså ikke med parameteren I og forutsetter denne stilltiende.

Teorem 10.4 (Aα)(Aβ)(α<β → xêPt(A(α))^I → xêA(β))

Bevis: Satsen bevises ved induksjon på β. (i) Er β=0 er det åpenbart at satsen holder
(ii) Anta α< β+1. Da har man A(β+1)= A(β) U Pt(α(β))^I. Ved hjelp av induksjonshypotesen har man da Pt(A(α))^I Inkl A(β) Inkl A(β+1).
(iii) Anta βêK;II. Da har man at A(β) = UN/λ<β/(A(λ)). Anta α<β. Da har vi α+1<β siden βêK;II. Siden α<α+1 har vi ved hjelp av induksjonshypotesen at
Pt(A(α))^I Inkl A(α+1) Inkl UN/λ<β/(A(λ)) = A(β) **QED**.

Teorem 10.5 (Aα)(Aβ)(α<β → {<A(α),w>: wêI}êA(β))

Bevis: Anta α<β. Sett per definisjon (1) Q(α) = {<A(α),w>: wêI}. Da har vi:
(2) Func(Q(α)) & Dom(Q(α)) = I &
(Aw)(wêDom(Q(α) → Q(α)(w)=A(α) êPt(A(α)))
(2) impliserer at Q(α)êPt(A(α))^I. Fra dette, det at α<β og Teorem 10.4 følger Q(α)êA(β). **QED**.

Teorem 10.6 (Aα)(Aβ)(α<β → A(α) SInkl A(β))

Bevis: Satsen bevises ved induksjon på α. (i) α=0. Da holder satsen trivielt.
(ii) β=δ+1. Anta α<δ+1. Da har vi enten α<δ eller α=δ. Tilfelle 1: α<δ. Da har vi ved hjelp av induksjonshypotesen at A(α) SInkl A(δ) = A(δ)UPt(A(δ))^I = A(β) og derfor A(α) SInkl A(β). Tilfelle 2: α=δ. Da følger A(α)= A(δ) Inkl A(δ) U Pt(A(δ))^I = A(β). Nå har man at (1) λ/wεI/(A(α)) êPt(A(α))^I = Pt(A(λ))^I Inkl A(β). Men hadde vi
λ/wεI/(A(α)) êA(α) ville vi ha A(α) ê{A(α)} ê<A(α),w>ê λ/wεI/(A(α)) êA(α) som er umulig ifølge Fundierungsaksiomet. Vi har derfor ¬(λ/wεI/(A(α)) êA(α)). Dette impliserer sammen med (1) at A(α) SInkl A(β).

© 2012 Morten Harboe Rognes

(iii) βêK;II. Da har man A(β) = UN/δ<β/(A(δ)). Er α<β har vi da α+1 <β siden β er et grenseordinal. Ved hjelp av induksjonshypotesen har vi i så fall

A(α) SInkl A(α+1) Inkl UN/δ<β/(A(δ)) = A(β). **QED**.

Definisjon 10.3 Pt;a(x) = {z : (Eβ)(zêA(β,I)) & (Aw)(wêI → z(w) Inkl x(w))}

Teorem 10.7 xêA(α) → Pt;a(x) Inkl A(α)

Bevis: Satsen bevises ved induksjon på α. (i) α=0. Da har vi A(α)=ø. I dette tilfellet er det trivielt at påstanden holder.

(ii) α=β+1. Da har man (1) A(α) = A(β) U Pt(A(β))^I. Anta (2) xêA(α) & zêPt;a(x) for vilkårlig z. Vi ønsker å vise at zêA(α). Fra den siste konjunkten i (2) og Definisjon 10.3 at (3) zêA(δ) for noe δ og (4) (Aw)(wêI → z(w) Inkl x(w)). Siden xêA(α) har vi ifølge (1) enten xêA(β) eller xê Pt(A(β))^I. *Tilfelle 1*: xêA(β). Da har vi ved hjelp av induksjonshypotesen at Pt;a(x) Inkl A(β) Inkl A(β+1)=A(α). Det følger at zêA(α)

Tilfelle 2: xê Pt(A(β))^I. Da følger: (Aw)(wêI → x(w) Inkl A(β)). Fra dette og (4) følger (Aw)(wεI → z(w) Inkl A(β)). Men da kan man slutte

zêPt(A(β))^I Inkl A(β+1) = A(α).

I begge tilfellene har vi zêA(α). Det følger at satsen holder om α=β+1.

(iii) αêK;II. Da har man A(α) = UN/β<α/(A(β)). Har vi da xêA(α) har vi xêA(β) for noe β<α og derfor ved hjelp av induksjonshypotesen at

Pt;a(x) Inkl A(β) Inkl UN/β<α/(A(β)) = A(α) **QED**.

På samme måte som man kan innføre en rang-funksjon for elementene i det rene kumulative mengdehierarkiet kan man innføre en rangfunksjon for elementene i det kumulative egenskapshierarkiet <A(α)>/αêOn/. I det følgende betyr μα(F(α)). Det minste ordinaltallet α som er slik at F(α). Vi definerer rangen til x, ρ;I(x) ved:

Definisjon 10.4 ρ;I(x) = μα(xêA(α+1,I))

I det følgende vil vi sløyfe parameteret I der det ikke kan føre til misforståelser og skriver "ρ(x)" istedet for "ρ;I(x)".

Man kan kalle ρ;I(x) for I-rangen til x. Sammenligner man denne rangfunksjonen med den tilsvarende rangfunksjonen for elementer i det kumulative mengdehierarkiet, Rank, som er innført i Takeuti & Zaring [1], er det naturlig å forvente en ganske vidtgående analogi mellom de to funksjonene.

Teorem 10.8 (Eβ)(xêA(β,I)) → [(¬(xêA(α,I)) & xêA(α+1,I)) ↔ α = ρ;I(x)]

Bevis: Anta (1) (Eβ)(xêA(β,I)). Vi skal bevise:

(2) (¬(xêA(α,I)) & xêA(α+1,I)) ↔ α = ρ;I(x).

(i) Vi tar først for oss kondisjonalen mot venstre i (2). Anta (3) α= ρ;I(x). Da har vi ved hjelp av definisjonen av ρ at α = μβ(xêA(β+1,I)). Det følger at (4) xêA(α+1) og (5) (Aδ)(δ<α → ¬(xêA(δ+1,I)). Anta for reduktio ad absurdum at (6) xêA(α,I). Det er da tre muligheter alt ettersom α er ø, et etterfølgerordinall tall eller et grenseordinaltall. Er α=0 har vi A(α,I)=ø . Da er det naturligvis umulig at (6) holder. Dette tilfellet er derfor utelukket. Anta α=β+1 for noe β. Da har vi xêA(β+1,I) & β<α. Dette strider mot (5). Derfor er også dette tilfellet utelukket. Har vi endelig at αêK;II følger det fra (6) at det finnes β slik at

© 2012 Morten Harboe Rognes

(7) $\beta<\alpha$ & $x\hat{e}A(\beta;I)$. Da har vi $x\hat{e}A(\beta+1,I)$. Men dette og (7) strider også mot (5). Det følger at også dette tilfellet er utelukket. Siden vi i hvert ethvert tilfelle kan utlede en motsigelse følger det at (6) ikke holder og at vi derfor har: $\neg(x\hat{e}A(\alpha,I))$. Fra dette og (4) følger venstre side i (2).

(ii) Vi viser så kondisjonalen mot høyre. Anta (8) $\neg(x\hat{e}A(\alpha,I))$ & $x\hat{e}A(\alpha+1,I)$. Da følger selvfølgeli at $x\hat{e}A(\alpha+1,I)$ og derfor ved hjelp av definisjonen av $\rho;I$ at
(9) $\alpha >= \rho;I(x)$. Siden vi ved hjelp av Teorem 10.3 har

(9.1) $(A\alpha)(A\beta)(\beta=<\alpha \rightarrow A(\beta;I)$ Inkl $A(\alpha,I))$.

følger det i lys av (8) at (10) $(A\beta)(\beta=<\alpha \rightarrow \neg(x\hat{e}A(\beta,I))$. Nå kan man fra definisjonen av $\rho;I$ slutte at (11) $x\hat{e}A(\rho;I(x)+1,I)$. Hadde vi $\alpha=\rho;I(x)+1$ ville vi ha $x\hat{e}A(\alpha,I)$ som strider mot (8). Hadde vi $\alpha>=\rho;I(x)+1$ ville vi ha ved hjelp av (9.1) og (11) at

$x\hat{e}A(\rho;I(x)+1,I)$ Inkl $A(\alpha,I)$. Dette strider også mot (8). Det følger derfor at $\alpha< \rho;I(x)+1$ og derfor at $\alpha=<\rho;I(x)$. Dette og (9) impliserer at $\alpha=\rho;I(x)$. **QED**.

Teorem 10.9 $(E\alpha)(x\hat{e}A(\alpha;I)) \rightarrow \rho;I(x)\hat{e}On$

Bevis: Anta $(E\alpha)(x\hat{e}A(\alpha,I))$. Da finnes λ slik at (1) $x\hat{e}A(\lambda,I)$. Da må det også finnes et minste ordinaltall λ som oppfyller (1). La oss kalle det $\lambda 0$. I så fall har vi $x\hat{e}A(\lambda 0,I)$. Det er klart at $\lambda 0$ ikke kan være 0. Vi har derfor at $\lambda 0=\delta+1$ for noe δ eller $\lambda 0\hat{e}K;II$. I det første tilfelle har vi $\rho;I(x) = \delta\varepsilon On$. I det andre tilfelle har vi $\rho;I(x) = \lambda 0+1\hat{e}On$. **QED**.

Teorem 10.10 $(E\beta)(x\hat{e}A(\beta,I)) \rightarrow .\ \beta=< \rho;I(x) \leftrightarrow \neg(x\hat{e}\ A(\beta,I))$

Bevis: Anta (1) $(E\beta)(x\hat{e}A(\beta;I)$. Fra dette og Teorem 10.8 kan vi slutte at
(2) $\neg(x\hat{e}A(\rho;I(x),I)$. Har vi da $\beta=<\rho;I(x)$ følger $A(\beta;I)$ Inkl $A(\rho;I(x),I)$ og derfor ved hjelp av (2) at $\neg(x\hat{e}A(\beta;I)$. Dette viser at den ene halvdelen av satsen holder.

Anta (1) holder og at (3) $\neg(x\hat{e}A(\beta,I))$. Anta for reduktio at $\beta>\rho;I(x)$. Da har man at $\beta>= \rho;I(x)+1$. Det følger at $A(\rho;I(x)+1)$ Inkl $A(\beta,I)$. Fra dette og (3) følger
(4) $\neg(x\hat{e}A(\rho;I(x)+1))$. Men fra Teorem 10.8 og (1) har vi $x\hat{e}A(\rho;I(x)+1,I)$ som strider mot (4). Det følger at $\neg(\beta>\rho;I(x))$ og derfor at $\beta=<\rho;I(x)$. **QED**.

Teorem 10.11 $y\hat{e}A(\alpha,I) \rightarrow x\ \hat{e};(w;I)\ y \rightarrow \rho;I(x) < \rho;I(y)$

Bevis: Anta (1) $y\hat{e}A(\alpha,I)$ og (2) $x\ \hat{e};(w,I)\ y$. Sett per definisjon (2) $\lambda = \rho;I(x)$. Da har vi ved hjelp av Teorem 10.8, siden $x\hat{e};(w,I)y$ impliserer at $(E\beta)(x\hat{e}A(\beta,I))$, at (3) $\neg(x\hat{e}A(\lambda,I))$. Anta for reduktio ad absurdum at (4) $y\hat{e}A(\lambda+1,I)$. Da har vi $y\hat{e}A(\lambda,I)$ U $Pt(A(\lambda,I))\hat{}I$. Vi skiller mellom to tilfelle:

Tilfelle 1: $y\hat{e}A(\lambda,I)$. Da har vi ved hjelp av (2) og Teorem 10.1 at $x\hat{e}A(\lambda,I)$. Men dette strider mot (3). Dette tilfellet er derfor utelukket..

Tilfelle 2: $y\hat{e}\ Pt(A(\lambda,I))\hat{}I$. Da har vi siden $w\hat{e}I$, dette følger fra (1) og definisjonen av $\hat{e};(w,I)$, at (5) $y(w)$ Inkl $A(\lambda,I)$. Fra (2) følger $x\hat{e}y(w)$. Men fra dette og (5) følger $x\hat{e}A(\lambda,I)$ som strider mot (3). Også dette tilfellet er derfor utelukket.

Siden begge tilfelle leder til motsigelser følger det at (4) er selvmotsigende. Vi har derfor $\neg(y\hat{e}A(\lambda+1,I))$. Fra dette, (1) og Teorem 10.10 følger derfor $\lambda+1=<\rho;I(y)$. Fra dette følger så $\rho;I(y) > \lambda$ og derfor ved hjelp av (2) at $\rho;I(y)>\rho;I(x)$. **QED**.

Teorem 12.12 $w\hat{e}I \rightarrow (Ax)(x$ Inkl $A(\alpha,I)$ & $x\neq\emptyset \rightarrow (Ey)(y\hat{e}x$ & $x\ \Omega\ e;(w,I);-1"\{y\} =\emptyset))$

© 2012 Morten Harboe Rognes

Bevis: Anta (1) wêI og at (2) x Inkl A(α,I) & x≠ø. Definer a ved å sette:
(3) a = {ρ;I(y): yêx}. Siden x ifølge (2) er ikke-tom har vi at a er ikke-tom. Videre er det klart at ρ;I(y) er et ordinaltall siden yêx Inkl A(α,I). Dette følger ved hjelp av Teorem 10.9. Vi har altså: (4) ø≠a Inkl On. Siden a er en ikke-tom mengde med ordinaltall må det finnes et minste ordinaltall i a. Vi betegner dette med λ. Vi har altså (5) λ= μβ(βêa). Definer b ved å sette: (6) b= {z: zêx & ρ;I(z)=λ}. Fra dette, (3) og (5) følger at b≠ø. Det følger at det finne q slik at (7) qêb Det er da klart at (8) qêx. Det vil være tilstrekkelig å vise at (9) qΩ e;(w,I);-1"{q}=ø, siden det fra dette og (8) følger at (Ey)(yêx & x Ω e;(w,I);-1"{y} =ø). Anta for reduktio ad absurdum at det finnes noe y slik at (10) yêx & yêe;(w,I);-1"{q}. Fra den siste konjunkten i (10) følger at det finnes r slik at rê{q} & <r,y>êe;(w,I);-1. Dette impliserer r=q & <y,r>êe;(w,I), som i sin tur impliserer at (11) y e;(w,I) q. Fra (8) og (2) følger dessuten qêA(α,I). Dette og (11) impliserer ved hjelp av Teorem 10.11 at (12) ρ;I(y) < ρ;I(q). Siden vi ved hjelp av (10) har yêx følger ved hjelp av (3) at (13) ρ;I(y)êa. Siden qêb ifølge (7) har vi ρ;I(q) =λ = μ(β)(βêa). Det følger derfor at (Aδ)(δêa → ρ;I(q) =< δ). Fra dette og (13) følger ρ;I(q)=< ρ;I(y). Men dette strider mot (12). Det kan derfor ikke finnes noe y som oppfyller kravet (10). Vi har med andre ord at (9) holder. **QED**.

Teorem 10.13 wêI → e;(w,I) WFr A(α,I) [22]

Bevis: Man ser at Teorem 10.12 innebærer at e;(w,I) Fr A(α,I) om wêI. For å vise at e;(w,I) WFr A(α,I) om wêI er det derfor nok å vise at
(1) (Ax)(xêA(α,I) → M(A(α,I)Ω e;(w,I);-1"{x})). Men siden M(A(α;I)) om αêOn, vi forutsetter at M(I), følger (1) ved hjelp av utsondringsaksiomet. **QED**.

Teorem 10.14 wêI → xêA(α,I) & (Es)(s e;(w,I) x) →
(Et)(t e;(w,I) x & ¬(Er)(r e;(w,I) t & r e;(w,I) x))

Bevis: Anta (1) wêI og (2) xêA(α,I) & (Es)(s e;(w,I) x). Sett x0= {y: y e;(w,I)x}. Da har man at x0 Inkl A(α,I) og siden (Es)(s e;(w,I) x) at x0≠ø. Det følger da ved hjelp av Teorem 10.12 at (Er)(r e;(w,I) x0 & x0 Ω e;(w,I);-1"{r}=ø). Fra dette følger så: (Et)(t e;(w,I) x & ¬(Er)(r e;(w,I) t & r e;(w,I) x)) som er det vi ønsker. **QED**.

Det bør noteres at når vi senere skal vise at TA24 er gyldig i det vi kaller standardmodellen for L;a er det naturlig å benytte det teoremet vi her har vist. Man skulle umiddelbart se at det har samme struktur som TA24 og forøvrig Fundierungsaksiomet i ZFC.

Vi definerer nå en viss sumoperasjon på elementene i A(α,I) som vi betegner med U;i. Definisjonen er denne:

Definisjon 10.5 U;i(x) = {<{z: (Ey)(z e;(w,I) y & y e;(w,I) x},w>: wêI}

Teorem 10.15 xêA(α,I) → U;i(x)ê A(α+1,I)

22 For en presis definisjon av R Wfr A, det vil si at R er en velfundert relasjon over A, se Takeuti & Zaring [1], side 27, Definisjon 6.24. At R er en fundert relasjon over A, i symboler, R Fr A, defineres som i Takeuti & Zaring [1]. Se side 27, Definisjon 6.21. R Fr A er altså definert slik:
R FR A ↔ (Ax)(x Inkl A & x≠ø → (Ex)(xêa & a Ω F;-1"{x}=ø)).

© 2012 Morten Harboe Rognes

Bevis: Anta xêA(α,I). Anta w er et vilkårlig element der wêI. Da har man ved hjelp av Teorem 10.1 at {z: (Ey)(z e;(w,I) y & y e;(w,I) x} Inkl A(α,I). Fra dette følger (U;i(x))(w) êPt(A(α,I). Siden w var vilkårlig element i I følger det at U;i(x)êPt(A(α,I))^2 Inkl A(α+1,I). **QED**.

Teorem 10.16 βêK;II & xêA(β,I) → U;i(x)êA(β,I)

Bevis: Anta (1) βêK;II og xêA(β,I). Da har vi xêUN/α<β/(A(α,I)). Det følger at det finnes α der α<β og xêA(α;I). Fra dette følger U;i(x)êA(α+1;I) ved hjelp av Teorem 10.15. Men siden βêK;II har vi, siden α<β at α+1<β. Det følger at

U;i(x)êA(α+1,I) Inkl UN/λ<β/(A(λ,I)) = A(β,I). **QED**.

Teorem 10.17 x,yêA(α,I) → {<{x,y},w>: wêI}êA(α+1,I)

Bevis: Anta x,yêA(α,I). Da har vi {x,y} Inkl A(α,I). Sett c= {<{x,y},w>: wêI}. Er da w et vilkårlig element i I har c(w) = {x,y}ê Pt(A(α,I)). Det følger at cêPt(A(α,I))^I. Inkl A(α+1,I). **QED**.

Teorem 10.18 xêA(α,I) → {<Pt;a(x),w>:wêI}êA(α+1,I)

Bevis: Anta xêA(α,I). Ved hjelp av Teorem 10.7 har vi da at (2) Pt;a(x) Inkl A(α,I). Sett c(x) = {<Pt;a(x),w>:wêI}. Da har man (Aw)(wêI → c(x)(w) = Pt;a(x)). Fra dette og (2) følger: (3) (Aw)(wêI → c(x)(w) Inkl A(α,I)). Men c(x) er en funksjon med I som domenet. Man ser lett fra (3) at verdiområdet til c(x) er inkludert i Pt(A(α,I))^I. Det følger at c(x)ê Pt(A(α,I))^I Inkl A(α+1,I). **QED**.

Teorem 10.19 A(1,I) = {{<x,ø>: xêI}}

Bevis: Vi har at A(1,I) = A(0,I)UPt(A(0,I))^I = ø U Pt(ø)^I =

Mg(x: Func(x) & Dom(x)= I & Rgn(x) Inkl Pt(ø)) =
Mg(x: Func(x) & Dom(x)= I & Rgn(x) Inkl Mg(z: z Inkl ø)) =
Mg(x: Func(x) & Dom(x) =I & Rgn(x) Inkl {ø}) =
Mg(x: Func(x) & Dom(x) =I & (Aw)(wêI → x(w)=ø)) =
= Pt(A(α,I))^I **QED**.

Definisjon 10.6 Eg(x) ↔ (Eα)(xêA(α,I))

Den følgende sats er vesentlig når vi senere skal vise at den modale varianten av ekstensjonalitetetsaksiomet, TA11 er gyldig i standardmodellen for L;a:

Teorem 10.20 Eg(x) & Eg(y) & (Aw)(wêI → (Az)(z e;(w,I) x ↔ z e;(w,I) y)) → x=y

Bevis: Vi skal først vise at man har (Ax)(Eg(x) → Func(x) & Dom(x)=I). I lys av definisjonen av Eg vil det være nok å vise (1) (Ax)(xêA(α,I) → Func(x) & Dom(x)=I). Dette bevises ved induksjon på α. For α=0 påstanden opplagt. Anta α=β+1 og anta xêA(α;I). Da har vi xêA(β;I) U Pt(A(β,I))^I. Er xêA(β;I) følger satsen ved hjelp av induksjonshypotesen. Er xêPt(A(β;I))^I har vi per definisjon av a^b at Func(x) & Dom(x)=I.

© 2012 Morten Harboe Rognes

Anta αêK;II. Da har vi om xêA(α,I) at xêA(β,I) for noe β<α. Da følger satsen ved hjelp av induksjonshypotesen.

La oss så vise at teoremet holder. Anta (2) Eg(x) & Eg(y). Anta dessuten at (3) (Aw)(wêI → (Az)(z e;(w,I) x ↔ z e;(w,I) y)). Fra (2) følger ved hjelp av (1):

(4) Func(x) & Dom(x) = I = Dom(y) & Func(y). Fra (3) og definisjonen av e;(w,I) har man: (5) (Aw)(wêI → {z: zêx(w)} = {z: zêy(w)}) . Herav (Aw)(wêI → x(w)=y(w)). Dette og (4) impliserer åpenbart at x=y. **QED**.

Vi minner om at vi i dette kapitlet arbeider innenfor rammen av ZFC slik dette systemet er defineret i Takeuti & Zaring [1]. Alle grunnleggende begreper er definert på samme måte som der. Videre bruker vi nå mengdeabstraksjonstermer på samme måte som i denne boken. La oss også nevne at V nå er allmengden og at V er definert ved V={x:x=x}. R(α) er definert som i den nevnte bok. R(α) representerer nivå α i det rene kumulative hierarki av mengder.

I det følgende betegner E medlemskapsrelasjonen. E er definert ved E={<x,y>: xêy}. Man kan som i Takeuti & Zaring vise at E er en velfundert relasjon over V. Dette følger ved hjelp av Fundierungsaksiomet. Ved hjelp av rekursjonsteoremet for velfunderte relasjoner kan vi nå definere en funksjon F på følgende måte

Definisjon 10.7 (i) F Fn V
(ii) (Ax)(F(x) = {<Rgn(Rest(F, E;-1"{x})), w>: wêI}

Fra rekursjonsteoremet følger det også at denne funksjonen F er entydig bestemt.

Vi tar nå for oss den følgende sats:

Teorem 10.21 (a) xêR(α) → F(x)êA(α,I)
(b) F(x) = F(y) → x=y
(c) wêI → (xêy ↔ F(x) e;(w,I) F(y))
(d) xêRgn(F) →. Func(x) & Dom(x)=I & (Ea)((Aw)(wêI → x(w)=a)

Bevis: *Ad (a)*: Denne påstanden bevises ved induksjon på α. (i) Anta α=0. Da har man R(α)=ø og satsen holder trivielt. (ii) Anta α=β+1 for noe ordinal tall β. (1) Anta xêR(α). Da har man (2) xêR(β)U Pt(R(β)). I tilfelle xêR(β) har man at satsen holder ved hjelp av induksjonshypotesen. Anta (3) xêPt(R(β)). Da følger (4) x Inkl R(β). Da har vi

(5) (Az)(zêx → zêR(β)). Nå har man at

(6) Rgn(Rest(F, E;-1"{x})) = Rgn(Rest(F,x)) = F"x. Anta nå for vilkårlig r at (7) rêF"x. Da har vi etter definisjonen av F"x at det må finnes y slik at (8) r=F(y) & yêx. Fra dette og (5) kan man slutte at yêR(β) og derfor ved hjelp av induksjonshypotesen at F(y)êA(β,I). Fra dette og (8) følger så rêA(β,I). Siden r var vilkårlig har vi nå vist:

(9) F"x Inkl A(β,I). Fra dette og (6) følger så:

(10) Rgn(Rest(F, E;-1"{x})) Inkl A(β,I)

Nå kan man fra Definisjon 10.7 slutte (Aw)(wêI → F(x)(w) = Rgn(Rest(F, E;-1"{x}))). Fra dette og (10) følger: (11) (Aw)(wêI → F(x)(w) Inkl A(β,I)). Herav:

(11) (Aw)(wêI → F(x)(w)êPt(A(β,I))). Men herav har man F(x)êPt(A(β,I))^I Inkl A(β+1,I)) = A(α,I) siden α=β+1.

(iii) Anta αêK;II og at xêR(α). Da har vi ved hjelp av definisjonen av R(α) at xêR(β) for noe β<α. Ved hjelp av induksjonshypotesen følger da at

F(x)êA(β,I)ê UN/β<α/(A(β,I)) = A(α,I). Dette viser at punkt (a) holder.

© 2012 Morten Harboe Rognes

Ad (b): Dette bevises ved ê-induksjon på x. Anta (1) F(x) = F(y). Som induksjonshypotese antar vi :

(+) (Ay)(yêx → (Az)(F(y) = F(z) → y=z))

Fra (1) har vi ifølge definisjonen av F at (2) F(x)(w) = F(y)(w) og derfor:

(3) Rgn(Rest(F, E;-1"{x})) = Rgn(Rest(F, E;-1"{y})) Fra dette følger:

(4) {F(z): zêx} = {F(z): zêy} Herav følger

(5) (Ar)((Ez)(r=F(z) & zêx) ↔ (Ez)(r=F(z) &zêy))

Anta nå for reduktio ad absurdum at x≠y.

Tilfelle 1: Det finnes noe q der (6) qêx & ¬(qêy). Siden qêx, og vi har at F Fn V, har vi følgelig at Dom(F)=V og derfor F(q)ê{F(z): zêx}. Det finnes følgelig z slik at (7) F(q)=F(z) & zêx. Fra dette og (5) følger eksistensen av w slik at (8) F(q) = F(w) & wêy. Fra (6) og (8) følger qêx & F(q)=F(w). Etter induksjonshypotesen må vi da ha at q=w. Men fra dette og (8) følger qêy som strider mot (6). Dette tilfellet er derfor utelukket.

Tilfelle 2: Det finnes noe q der (9) qêy & ¬(qêx). Da har vi F(q)ê{F(z): zêy} og derfor at det finnes z slik at (10) F(q)=F(z) & zêy. Fra dette og (5) følger eksistensen av w slik at (11) F(q)=F(w) & wêx. Fra dette og (10) følger wêx & F(q)=F(w). Fra dette og induksjonshypotesen kan vi slutte: q=w. Men da har vi siden wêx at qêx. Dette strider åpenbart mot (9). Også dette tilfellet er derfor utelukket.

Det følger at det er usant at x≠y. Vi må derfor ha x=y. Dette viser at punkt (b) holder.

Ad (c): Anta (1) wêI. Nå har vi etter definisjonen av F at

(2) (Aw)(wêI → F(y)(w) = Rgn(Rest(F, E;-1"{y})))

Vi beviser først kondisjonalen mot høyre: Anta (3) xêy. Da har vi (4) xêE;-1"{y}. Herav følger F(x) ê Rgn(Rest(F,E;-1"{y})). Fra dette, (1) og (2) følger: F(x) êF(y)(w). Herav følger så F(x) e;(w,I) F(y). Dernest tar vi for oss kondisjonalen mot venstre: Anta (5) ¬(xêy). Da følger ¬(xêE;-1"{y}). Siden F er en en-entydig funksjon ifølge punkt (b) kan vi herav slutte: (6) ¬(F(x)êRgn(Rest(F, E;-1"{y}))). Fra (1) og (2) følger :

F(y)(w)= Rgn(Rest(F, E;-1"{y})). Fra dette og (6) har vi: ¬(F(x)êF(y)(w)). Men dette impliserer ¬(F(x) e;(w,I) F(y))

Ad (d): Anta (1) yêRgn(F). Da har vi at det må finnes noe x slik at (2) y=F(x). Fra definisjonen av F fremgår da at (3) Func(y) & Dom(y)=I . Nå er det relativt enkelt å vise at M(Rgn(Rest(F,x)). Det følger derfor at det finnes noe a slik at (4) a=Rgn(Rest(F,x)). Anta nå for vilkårlig w at (5) wêI . Da har man at i lys av (4):

y(w) = F(x)(w) = Rgn(Rest(F, E;-1"{x})) = Rgn(Rest(F,x)) = a

Siden w var vilkårlig har vi da: (Aw)(wêI → y(w)=a). Det følger da at

(Ea)((Aw)(wêI → y(w)=a). Dette sammen med (3) viser at punkt (d) holder. **QED**.

Med et relasjonelt system forstår vi et par <D,R> der D er en ikke-tom mengde og R er en relasjon over A. Er S=<D,R> og S'= <D',R'> to relasjonelle systemer kaller vi dem *isomorfe* om (i) det finnes en funksjon f der f: D -(1-1,på)→ D' og (ii) vi har at

(Ax)(Ay)(x,yêD → (xRy ↔ f(x)Rf(y)))

Har man at f er en funksjon som oppfyller kravene (i) og (ii) sier vi at *f er en isomorfi mellom de to relasjonelle systemene S og S'*.

Vi definerer A;I og E(w) ved å sette:

© 2012 Morten Harboe Rognes

Definisjon 10.8 (a) $A;I = UN/\alpha\hat{e}On/(A(\alpha,I))$
(b) $E(w)= \{<x,y>: x\ e;(w,I)\ y\ \&\ x,y\hat{e}A;I\}$

Ved hjelp av Teorem 10.21 kan man lett utlede:

Teorem 10.22 Er $w\hat{e}I$ har man at F er en isomorfi mellom de to relasjonelle systemene $<V,E>$ og $<F"V, E(w)>$

I det følgende vil vi ha bruk for begrepet 'strengt monoton ordinaltallsfunksjon'. En slik funksjon G er en funksjon der domenet er et ordinaltall, eventuelt mengen av alle ordinaltall og hvor vi har at G er strengt stigende for alle tallene i domenet, dvs. har man at α,β er ordinaltall i domenet til G der $\alpha<\beta$ har man også at $G(\alpha)<G(\beta)$. Vi skal bruke uttrykket "Smo(G)" som forkortelse for "G er en strengt monoton ordinaltallsfunksjon" og gir den følgende formelle definisjon:

Definisjon 10.9 $Smo(G) \leftrightarrow Func(G)\ \&\ Ord(Dom(G))\ \&\ Rgn(G)\ Inkl\ On\ \&$
$(A\alpha)(A\beta)(\alpha<\beta \rightarrow G(\alpha) < G(\beta)$

Vi gjør oppmerksom på at vi i det følgende, om x er en mengde, bruker uttrykket "Cd(x)" for å betegne kardinaltallet til mengden x.

Teorem 10.23 $(A\alpha)(A\beta)(\alpha<\beta \rightarrow Cd(A(\alpha,I)) < Cd(A(\beta,I)))$

Bevis: Vi viser dette ved induksjon på β. (i) $\beta=0$. I dette tilfellet holder satsen trivielt. (ii) Anta (1) $\alpha<\beta\ \&\ \beta=\lambda+1$. Vi har i så fall (2) $A(\beta,I) = A(\lambda,I)U\ Pt(A(\lambda,I))^I$. Siden $\alpha<\beta$ følger at $\alpha < \lambda+1$ og derfor at $\alpha =< \lambda$. Da har vi ved hjelp av induksjonshypotesen at

$Cd(A(\alpha;I)) =< Cd(A(\lambda,I)) < Cd(A(\lambda,I)U\ Pt(A(\lambda,I))^I) = Cd(A(\beta;I))$

siden kardinaltallet til $Pt(A(\lambda,I))^I$ åpenbart er større enn kardinaltallet til $A(\lambda,I)$ siden $Cd(I) >\omega$. (iii) $\beta\hat{e}K;II$. Da har vi at $A(\beta,I) = UN/\lambda<\beta/(A(\lambda))$. Siden $\alpha<\beta$ og $\beta\hat{e}K;II$ følger at $\alpha+1<\beta$. Da har vi ved hjelp av induksjonshypotesen at

$Cd(A(\alpha,I)) < Cd(A(\alpha+1,I))$ og siden $A(\alpha+1,I)\ Inkl\ UN/\lambda<\beta/(A(\lambda)) = A(\beta,I)$

følger det at $Cd(A(\alpha,I)) < Cd(A(\beta,I))$. **QED**.

Setter man $G= \{<\alpha, Cd(A(\alpha,I))>: \alpha\hat{e}On\}$ ser man lett ved hjelp av Teorem 10.23 at G er en strengt monoton ordinaltallsfunksjon.

Teorem 10.24 $(Ax)(x\hat{e}\alpha \rightarrow x\hat{e}R(\alpha))$ ie. $\alpha\ Inkl\ R(\alpha)$.

Bevis: Dette bevises ved induksjon på α. (i) $\alpha=0$. Da er det åpenbart at satsen holder. (ii) $\alpha=\beta+1$ for noe β. Anta $x\hat{e}\alpha$. Da har vi $x\hat{e}\beta U\{\beta\}$ og derfor at $x\hat{e}\beta$ v $x=\beta$. Har vi $x\hat{e}\beta$ har vi siden $\beta<\alpha$ at $x\hat{e}R(\beta)$ etter induksjonshypotesen og derfor at $x\hat{e}R(\beta)\ Inkl\ R(\alpha)$. Har vi på den annen side at $x=\beta$. Etter induksjonshypoesen har vi $\beta\ Inkl\ R(\beta)$. Det følger at $x\ Inkl\ R(\beta)$ og derfor at $x\hat{e}Pt(R(\beta)) = R(\beta+1) = R(\alpha)$. (iii) $\alpha\hat{e}K;II$. Da har man $R(\alpha)=UN/\alpha<\beta/(R(\beta))$. Er da $x\hat{e}\alpha$. Siden $\alpha\hat{e}On$ har vi da siden $\alpha\hat{e}K;II$ at $\alpha=UN(\alpha)$ og derfor at det finnes β slik at $x\hat{e}\beta\ \&\ \beta<\alpha$. Etter induksjonshypotesen har man da $\beta\ Inkl\ R(\beta)$ og derfor $x\hat{e}R(\beta)\ Inkl\ R(\alpha)$. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Teorem 10.25 $(A\alpha)(A\beta)(\alpha<\beta \rightarrow Cd(R(\alpha)) < Cd(R(\beta)))$

© 2012 Morten Harboe Rognes

Bevis: Beviset er ved induksjon på β. (i) β=0. Da er det åpenbart at den holder. (ii) Anta β=λ+1. og at α<β. I dette tilfellet har vi R(β) = Pt(R(λ)). Videre har vi α<λ+1. Da har vi enten α<λ eller α=λ. Har man α<δ følger ved hjelp av induksjonshypotesen at Cd(R(α)) < Cd(R(λ)) < Cd(Pt(R(λ))) = Cd(R(β)). Har man λ=α følger: Cd(R(α))= Cd(R(λ)) < Cd(Pt(R(λ))) = Cd(R(β)). I begge tilfelle holder satsen. (iii) Anta βêK;II og α<β. Da har vi α+1<β. I såfall følger ved hjelp av induksjonshypotesen at Cd(R(α)) < Cd(R(α+1)) =< Cd(UN/λ<β/(R(λ)))= Cd(R(β)). **QED**.

Teorem 10.26 Smo(G) → (Aα)(αêDom(G) → α=<G(α))

Bevis: Satsen bevises ved induksjon. (i) Anta α=0. Siden G er en strengt monoton ordinaltallsfunksjon har vi at G(0)êOn. Men for ethvert ordinaltall β har vi β>=0. Det følger at 0=<G(0). (ii) Anta (1) α=β+1 og satsen holder for alle λ<α, med andre ord anta at (2) (Aλ)(λ<α → λ =<G(λ)). Vi har da ved hjelp av (2), siden β<β+1=α og G er strengt monoton, at β=<G(β) < G(β+1). Fra dette følger β+1=<G(β+1). Siden α=β+1 har vi da α=<G(α). (iii) αêK;II. Da har vi om λ<α at λ <λ+1<α. Ved hjelp av induksjonshypotesen følger da λ =<G(λ) =<G(α). Vi har altså (1) (Aλ)(λ<α → λ =< G(α)). Nå har man

(+) δêOn →.(A Inkl On & (Aβ)(βêA → β =<δ) → UN(A)=<δ) [23]

Ser man her på spesialtilfellet der δ=G(α) og A=α følger siden G(α)êOn & α Inkl On at

(2) (Aλ)(λ<α → λ=<G(α)) → UN(α) =< G(α). Fra dette og (1) følger

(3) UN(α) =< G(α). Men vi har (Aβ)(βêK;II → UN(β)=β)[24]. Dette, det at αêK;II og (3) impliserer α =<G(α). **QED**.

Teorem 10.27 (Aα)(α =<Cd(R(α)))

Bevis: Definer ξ ved ξ = {<Cd(R(α)),α>: αêOn}. Man ser da lett at Smo(ξ) ved hjelp av Teorem 10.25. . Ved hjelp av Teorem 10.26 følger derfor: α =<ξ(α) = Cd(R(α)). **QED**.

Teorem 10.28 UN/β<α/(Cd(A(β,I))) =< Cd[UN/β<α/(A(β,I))]

Bevis: Nå har man (1) (Aλ)(λ<α → A(λ,I) Inkl UN/λ<α/(A(λ,I))) Fra dette følger:

(2) (Aλ)(λ<α → Cd(A(λ,I)) =< Cd[UN/λ<α/(A(λ,I))]) Nå har man

(+) δêOn →.(A Inkl On & (Aβ)(βêA → β =<δ) → UN(A)=<δ). (Vi brukte denne satsen i beviset for Teorem 10.26). Setter man her (3) δ = Cd[UN/λ<α/(A(λ,I))]) og

(4) A= {Cd(A(λ,I)): λ<α} har man åpenbart at (5) δêOn & A Inkl On. Anta for vilkårlig β at βêA. Da har vi at det må finnes λ slik at β= Cd(A(λ,I)) & λ<α. Fra dette og (2) følger β=< Cd[UN/λ<α/(A(λ,I))]). I lys av (3) impliserer dette: β=<δ. Vi har altså

(6) (Aβ)(βêA → β=<δ). Fra dette, (5) og (+) følger åpenbart UN(A) =<δ. I lys av (4) og (5) impliserer dette:

UN/β<α/(Cd(A(β,I))) =< Cd[UN/β<α/(A(β,I))]. **QED**.

Vi vil også bevise det omvendte av Teorem 10.20, nemlig:

Teorem 10.29 Cd[UN/β<α/(A(β,I))] =< UN/β<α/(Cd[A(β,I)])

23 Se Teorem 7.21 i Takeuti & Zaring [1]

24 Se øverst på side 38 i Takeuti & Zaring [1]

© 2012 Morten Harboe Rognes

Bevis: La oss først bemerke at satsen holder om α=0. Da har vi:
Cd[UN/β<α/(A(β,I))] = Cd[UN/β<0/(A(β,I))] = Cd[ø] =0 og
UN/β<α/(Cd[A(β,I)]) = ø =0. Satsen holder derfor i dette tilfellet. Vi skiller derfor mellom to tilfeller nemlig det tilfellet der αêK;I & α=β+1 for noe β og det tilfellet der αêK;II.
Tilfelle (i): αêK;I & α=β+1. Da har vi:
UN/λ<α/(A(λ,I)) = UN/λ<β+1/(A(λ,I)) = UN/λ=<β/(A(λ,I)) = A(β,I) siden
(Aα)(Aβ)(α=<β → A(α,I) Inkl A(β,I))
Det følger derfor at (1) Cd[UN/λ<α/(A(λ,I))] = CD[A(β,I)]
På den annen side har vi:
(2) UN/λ<α/(Cd[A(λ,I)]) =UN/λ<β+1/(Cd[A(λ,I)]) =
UN/λ=<β/(Cd[A(λ,I)]) = Cd[A(β,I)] siden
(Aα)(Aβ)(α=<β → Cd[A(α,I)] =<Cd[A(β,I)]). Fra (1) og (2) følger satsen. Satsen holder derfor i dette tilfellet.
Tilfelle (ii): αêK;II. Da har man naturligvis at Cd[α] >=ω. I dette tilfellet har vi
(*) (Aβ)(β<α → Cd(A(β,I)) Inkl UN/β<α/(Cd(A(β,I)))). Har vi a Inkl b følger Cd(a) =<Cd(b). Fra dette faktum og (*) følger:
(Aβ)(β<α → Cd(Cd(A(β,I))) =<Cd(UN/β<α/(Cd(A(β,I)))))
Siden Cd(Cd(a)) = Cd(a) for enhver mengde a følger herav:
(2.0) (Aβ)(β<α → Cd[A(β,I)] =< Cd(UN/β<α/(Cd[A(β,I)])))
Man kan nå bevise den følgende sats:
(+) Un(F) & (Ay)(yêb → Cd[F(y)] =< Cd[a]). → Cd[UN(F"b)] =< Cd[axb]
Setter man her (2.1) F = {<β,A(β,I)>: β<α} & b= α & a= UN/β<α/(Cd[A(β,I)])
ser man at vi har: (2.2) Un(F) Videre følger fra (2.0) og (2.1) at
(Ay)(yêb → Cd(F(y)) =< Cd(a)). Fra dette og (+) kan vi så konkludere med:
Cd[UN(F"b)] =< Cd[axb] som i lys av (2.1) innebærer at
(3) Cd[UN({A(β,I): βêα)] = Cd[UN/β<α/(A(β,I))]=<
Cd[UN/β<α/(Cd[A(β,I)]) x α]=Max(Cd[UN/β<α/(Cd[A(β,I)])] ,Cd[α])
Vi ønsker nå å bevise: (++) Cd(α) =< Cd[UN/β<α/(Cd[A(β,I)])]. Dette vil være tilstrekkelig fordi vi da ved hjelp av (3) har:
(4) Cd[UN/β<α/(A(β,I))] =< Cd[UN/β<α/(Cd[A(β,I)])] =< UN/β<α/(Cd[A(β,I)])
Siden vi har at Cd(α) =< α om α er et ordinaltall . (4) er naturligvis det vi ønsker.
Vi tar derfor sikte på å bevise (++). Ved hjelp av Teorem 10.21 og 10.22 har vi:
(Aβ)(β<α → Cd(R(β)) =< Cd(A(β,I)) Inkl UN/β<α/(Cd(A(β,I)))) og derfor
(Aβ)(β<α → Cd(R(β)) =< Cd(A(β,I)) =< Cd[UN/β<α/(Cd[A(β,I)])]
Ved hjelp av Teorem 7.21 i Takeuti & Zaring [1] kan vi herav slutte
(5) UN/β<α/(Cd(R(β))=< Cd[UN/β<α/(Cd[A(β,I)])]
I lys av (++) vil det derfor være tilstrekkelig å vise (6) α =< UN/β<α/(Cd(R(β))
Anta nå for vilkårlig β at βêα. Da har man β<α og siden αêK;II følger at
β<β+1<α. Vi har nå ved hjelp av Teorem 10.27 at
(6) β=< Cd(R(β)) < Cd(R(β+1)) = Cd(Pt(R(β)) Inkl UN/β<α/Cd(R(β))
Fra den første ulikheten følger β Inkl Cd(R(β)). Dette innebærer at
β êCd(R(β)) v β = Cd(R(β)). I begge tilfelle har vi ved hjelp av (6) at:
βêCd(R(β+1)) Inkl UN/β<α/Cd(R(β)). Men β var et vilkårlig element i α. Vi har derfor α Inkl UN/β<α/Cd(R(β)). Herav følger: α =< UN/β<α/Cd(R(β)). Dette viser at (6) holder. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Teorem 10.30 Inacc(α) & ω<Cd(I)<α → (Aβ)(β<α → Cd(A(β,I)) < α).

© 2012 Morten Harboe Rognes

Bevis: Satsen bevises ved induksjon på β. Anta (1) Inacc(α) & ω<Cd(I)<α.

(i) Anta β<α & β=0. Da har vi at A(β,I) =ø og følgelig at Cd(A(β,I)) =Cd(ø)=ø<α. Satsen holder derfor åpenbart i dette tilfellet.

(ii) Anta (2) β=λ+1 & β<α. Da har man (3) A(λ+1,I) = A(λ,I)U Pt(A(λ,I))^I. La oss notere at induksjonshypotesen i dette tilfellet er:

(4) (Aδ)(δ<λ+1 → Cd(A(δ,I)) < α

Siden α er et utilgjengelig kardinaltall har vi (5) (Ax)(Cd(x)<α → Cd(Pt(x))<α)

Siden λ < λ+1 <α har vi fra (4) og (5) :

(6) Cd(Pt(A(λ,I))) < α. Nå har man at det finnes noe β0êN slik at (7) Cd(I) = β0. Og tilsvarende må vi ha at det finnes β1 der (8) β1êN & Cd(Pt(A(λ,I))) = β1. Merk at N er mengden av alle uendelige kardinaltall.

Vi har β1=< β0 v β0 =<β1. Vi skiller derfor mellom to tilfeller:

Tilfelle 1: β1=< β0. Siden β0,β1êN har vi (9) Cd(β0)=β0 & Cd(β1)=β1[25]

Nå har man at følgende holder for alle a,b:

(10) Inf(b) & 2<Cd(a)=< Cd(Pt(b)) → Cd(a^b) = Cd(Pt(b))[26]

Siden Cd(I)>ω har vi β0>ω og derfor Inf(β0). Videre har vi om 2=<β1 at

2 =< β1=< β0 < Cd(Pt(β0)) og derfor ved hjelp av (10) at

Cd(β1^β0) = Cd(β0) = cd(Pt(I))

Videre følger ved hjelp av (1) og (5) at

Cd(Pt(A(λ,I))^I) = Cd(β1 ^β0) = Cd(Pt(I)) <α. I tilfelle β1<2 følger β1=0 v β1=1. I begge tilfelle har vi Cd(β1 ^β0) =< Cd(β0) = β0 = Cd(I) <α.

I alle tilfelle har vi: Cd(Pt(A(λ,I))^I) <α.

Tilfelle 2: β0=<β1. Siden β0>ω har vi Inf(β1) & 2 =< β0 =< β1 =< Cd(Pt(β1)). Vi har derfor ved hjelp av (7), (8) og (10) at

Cd(Pt(A(λ,I))^I) = Cd(β1 ^β0) =< Cd(β1^β1)= Cd(Pt(β1)) =

Cd(Pt(Pt(A(λ,I))) <α

Det siste leddet i denne rekken følger ved hjelp av (5) og (6). Det følger også i dette tilfellet at

Cd(Pt(A(λ,I))^I) <α.

Både i Tilfelle 1 og Tellefelle 2 har vi Cd(Pt(A(λ,I))^I) <α. Men da

Cd(A(λ+1,I)) = Cd(A(λ,I)U Pt(A(λ,I))^I) =

Max(Cd(A(λ,I)), Cd(Pt(A(λ,I))^I)) = Cd(Pt(A(λ,I))^I) <α

Det følger at satsen holder om β=λ+1.

(iii) Anta βêK;II. Induksjonshypotesen innebærer at

(Aλ)(λ<β → Cd(A(λ,I))<α). Siden Inacc(α) har vi Cd(α)=α og derfor:

(11) (Aλ)(λ<β → Cd(A(λ,I))<Cd(α)) Videre har vi

(12) A(β,I) = UN/λ<β/(A(λ,I)).

Anta β<α Fra (11) og satsen vi brukte i forrige bevis, nemlig:

(+) Un(F) & (Ay)(yêb → Cd[F(y)] =< Cd[a]). → Cd[UN(F"b)] =< Cd[axb]

har vi , om vi setter F= {<λ, A(λ,I)>: λêβ}, a= α og b = β, at

Cd(UN/λ<β/(A(λ,I))) =< Cd(αxβ). Siden Cd(α)> ω & Cd(β)>0 (βêK;II) har vi Cd(αxβ) = Max(Cd(α),Cd(β)) = Cd(α) =α. Vi har derfor:

(13) Cd(UN/λ<β/(A(λ,I))) =< α

Vi må imidlertid vise at Cd(UN/λ<β/(A(λ,I))) < α. Anta derfor for reduktio ad absurdum at

(14) Cd(A(β,I)) = α. Definer funksjonen f ved f(λ) = Cd(A(λ,I)) om λêβ. Vi har da ved hjelp av Teorem 10.28 og Teorem 10.29:

(15) UN(f"β) = UN({Cd(A(λ,I): λêβ})= Cd(UN/λ<β/(A(λ,I)) = Cd(A(β,I)) = α

25 Se Teorem10.38, side 80, i Takeuti & Zaring [1]

26 Se Teorem 11.18, side 97, i Takeuti & Zaring [1]

© 2012 Morten Harboe Rognes

Videre har vi ved hjelp av Teorem 10.23 at (16) Smo(f). Teorem 10.58 i Takeuti & Zaring [1] sier nå at

(++) βêK;II & f Fn β & α=UN(f"β) & Smo(f) → cof(α,β)

Siden βêK;II, f Fn β har vi i lys av (15), (16) og (++) at cof(α,β). Nå har vi at α er et utilgjengelig kardinaltall. Da må α være regulært. Dette innebærer at (17) cf(α)=α. Men cf(α) = μβ(cof(α,β)). Men fra det at cof(α,β) & β<α følger cf(α) <α. Dette strider mot (17). Vi har derfor at (14) er usann og følgelig, i lys av (13), at Cd(A(β,I)) < α. **QED**.

Teorem 10.31 Anta (i) Inacc(α) & ω<Cd(I) <α. Anta videre at

(ii) Func(f) & Dom(f) Inkl A(α,I) & Rgn Inkl A(α,I) . Anta tilslutt at

(iii) yêI & aêA(α,I)..

Da gjelder: {<f"a(y),w'>: w'êI}êA(α,I)

Bevis: Anta forutsetningene holder. Siden den tredje forutsetningen innebærer at (1) aêA(α,I) & yêI har vi ved hjelp av Teorem 10.1 at (2) a(y) Inkl A(α,I). Sett per definisjon c0= {<f"a(y),w>: wêI} og anta for reduktio ad absurdum at

(3) ¬(c0êA(α,I)), med andre ord at

(3.1) ¬({<f"a(y),w>: wêI}êA(α,I))

Da har vi ved hjelp av forutsetning (ii), siden a(y) Inkl A(α,I), at (4) f"a(y) Inkl A(α,I). Dette innebærer at f"a(y) êPt(A(α,I)) og derfor at (5) c0êPt(A(α,I)) Inkl A(α+1,I). Fra dette og (3) kan man ved hjelp av Teorem 10.8 slutte at

(6) ρ;I(c0)=α

Siden Inacc(α) har vi αêK;II. Fra dette og det at aêA(α,I) følger at aêUN/λ<α/A(λ,I) og derfor at det finnes λ slik at (7) aêA(λ,I) & λ<α. Fra dette følger:

(8) a(y) Inkl A(λ,I) og derfor ved hjelp av Teorem 10.30 at

(9) Cd(a(y)) =< Cd(A(λ,I)) < α. Det må altså finnes δ der vi har

(10) δ ~a(y) & δ<α [27]

Det finnes følgelig h slik at (11) h : δ -(1-1,på)→ a(y). Definer nå Δ ved:

(12) Δ(r) = ρ;I(f(h(r)) for rêδ. Det er da klart at

(12.1) Func(Δ) & Dom(Δ)=δ & Rgn(Δ) Inkl α

Vi må vise at Rgn(Δ) Inkl α. Er rêRgn(Δ) har vi r= ρ;I(z) der z=f(h(r)) for noe rêδ. Siden h(r)êa(y) har vi zêf"a(y) Inkl A(α,I). Da følger zêA(α,I). Men da har vi ved hjelp Teorem 10.10 at ρ;I(z)<α ie. rêα. Dette viser at Rgn(Δ) Inkl α

Anta nå for vilkårlig β at (13) β<α. Da har vi (14) ¬(f"a(y) Inkl A(β,I), for i motsatt fall ville vi ha c0êA(β+1,I), og siden ¬(c0êA(α,I)) og A(β,I) Inkl A(α,I) ville vi ha ¬(c0êA(β,I). Da ville vi ha ρ;I(c0) =β<α som strider mot (6). Det må derfor finnes x,z slik at

x=f(z) & zêa(y) & ¬(xêA(β,I)). Siden Rgn(f) Inkl A(α,I) har vi xêA(α,I). Vi kan da ved hjelp av Teorem 10.10 at ρ;I(x) >= β. Vi har derfor

Δ(h;-1(z)) = ρ;I(f(h(h;-1(z)) = ρ;I(f(z)) = ρ;I(x) >=β.

Siden β var vilkårlig element slik at (13) har vi vist at

(Aβ)(β<α → (Eξ)(ξêδ & Δ(ξ) >=β)) Sammen med (10) og (12.1) impliserer dette:

(15) δ <α & Δ: δ → α & (Aβ)(β<α → (Eξ)(ξêδ & Δ(ξ) >=β))

Nå sier Teorem 10.56 i Takeuti & Zaring [1] at

(+) δ < α & (Ef)(f: δ → α & (Aβ)(β<α → (Eξ)(ξêδ & f(ξ) >=β)) → (Eφ)(φ=<δ & cof(α,φ))

Dette og (15) impliserer at det finnes φ slik φ =<δ & Cof(α,φ). Men ifølge (10) er δ<α. Det

27 Merk at "x~y" betyr at "x er likemektig med y". Vi bruker "x « y" for å betegne at x er av mindre mektighet enn y og "x » y" betyr at x har større mektighet enn y.

© 2012 Morten Harboe Rognes

finnes derfor φ slik at (16) φ<α & Cof(α,φ). Men α er et utilgjengelig kardinaltall og derfor regulært. Da vi ha at cf(α)= μβ(cof(α,β)) = α. Men fra (16) følger cf(α)<α. Dette gir oss en motsigelse. **QED**.

Teorem 10.32 Anta

(i) Inacc(α) & ω< Cd(I) <α

(ii) Func(f) & Dom(f)= I & (Aw)(wêI →
Func(f(w)) & Dom(f(w)) Inkl A(α,I) & Rgn(f(w)) Inkl A(α,I))

(iii) aêA(α,I)

Da har man at {<f(w)"a(w), w>: wêI}êA(α,I)

Bevis: Anta forutsetningene (i) - (iii) holder. Anta for vilkårlig w at (1) wêI. Fra dette og den andre forutsetningen følger:

(2) Func(f(w)) & Dom(f(w)) Inkl A(α,I) & Rgn(f(w)) Inkl A(α,I)

Fra dette, (1) og Teorem 10.31 følger:

(3) {<f(w)"a(w), y>:yêI }êA(α,I)

Sett per definisjon: (4) r(w)= {<f(w)"a(w), y>:yêI }. Fra (3) følger siden αêK;II at det finnes γ slik at: (5) γ<α & {<f(w)"a(w), y>:yêI }êA(γ,I). Nå har vi fra (4)

(6) (Ay)(yêI → r(w)(y)=f(w)"a(w)). Anta yêI. Da har vi ved hjelp av (5) og (6) og Teorem 10.1 at r(w)(y) Inkl A(γ,I). Fra dette følger f(w)"a(w) Inkl A(γ,I). Siden y var vilkårlig har vi vist: (Ay)(yêI → f(w)"a(w) Inkl A(γ,I)). Men siden I≠ø følger herav

(7) f(w)"a(w) Inkl A(γ,I)

Siden w var vilkårlig objekt slik at (1) har vi vist:

(7.1) (Aw)(wêI → (Eγ)(γ<α & f(w)"a(w) Inkl A(γ,I)))

Definer nå G(w), for wêI, på følgende måte: (8) G(w) = μγ(γ<α & f(w)"a(w) Inkl A(γ,I))

Da har vi for alle wêI: (9) Func(G) & Dom(G)= I & Rgn(G) Inkl α

Fra den første forutsetningen kan man slutte at det må finnes δ der:

(10) δ<α & δ ~ I Følgelig finnes det h slik at

(11) h: δ -(1-1,på)→ I

Definer F ved (12) F(λ) = G(h(λ)) om λêδ. Da har vi:

(13) F: δ → α

Sett per definisjon: (14) b= {<f(w)"a(w),w>: wêI}

Anta nå for reduktio ad absurdum at (14.1) ¬({<f(w)"a(w),w>: wêI}êA(α,I)). Med andre ord anta (15) ¬(bêA(α,I)) Ved hjelp av (7.1) har vi f(w)"a(w) Inkl A(α,I)) for alle wêI. Det følger da at f(w)"a(w)êPt(A(α,I)) og derfor at (16) bêPt(A(α,I))^I Inkl A(α+1,I), Fra dette, (14) og (14.1) følger (17) ρ;I(b) =α

Vi ønsker nå å vise:

(18) (Aγ)(γ < α → (Eφ)(φêδ & F(φ) >=γ)

Anta derfor for vilkårlig γ at γ<α. Da kan vi ikke ha (Aw)(wêI → f(w)"a(w) Inkl A(γ,I)) for da ville vi ha bêA(γ+1,I) og siden A(γ,I) Inkl A(α,I) ville vi da ha i lys av (14) og (14.1) at ¬(bêA(γ;I)). I så tilfelle måtte vi ha ρ;I(b)=γ < α som strider mot (17).

Vi har derfor at det må finnes w der:

(19) wêI & ¬(f(w)"a(w) Inkl A(γ,I))

Da har vi G(w) >=γ for hadde vi G(w) < γ ville vi ha hatt, i lys av (8), at

(20) f(w)"a(w) Inkl A(p,I) for noe p<γ. Da ville vi ha A(p,I) Inkl A(α,I) noe som sammen med (20) ville stride mot (19). φ = h;-1(w). Da har vi F(φ)=G(h(h;-1(w)))=G(w) >=γ.

Siden γ var vilkårlig objekt <α har vi vist at (18) holder.

Som i det foregående bevis kan vi nå bruke Teorem 10.56 i Takeuti & Zaring [1] s

© 2012 Morten Harboe Rognes

som sier at:

(+) $\delta < \alpha \ \& \ (Ef)(f: \delta \rightarrow \alpha \ \& \ (A\beta)(\beta<\alpha \rightarrow (E\xi)(\xi \hat{e} \delta \ \& \ f(\xi) >= \beta)) \rightarrow (E\varphi)(\varphi = <\delta \ \& \ cof(\alpha,\varphi))$

Fra (10), (13) og (18) følger eksistensen av φ der $\varphi = <\delta < \alpha \ \& \ cof(\alpha,\varphi)$. Det finnes derfor φ slik at (21) $\varphi<\alpha \ \& \ Cof(\alpha,\varphi)$. Men α er et utilgjengelig kardinaltall og derfor regulært. Da vi ha at $cf(\alpha) = \mu\beta(cof(\alpha,\beta)) = \alpha$. Men fra (21) følger $cf(\alpha)<\alpha$. Dette gir oss en motsigelse. **QED**.

Som et enkelt korollar til Teorem 10.32 har vi:

Teorem 10.33 Anta

(i) $Inacc(\alpha) \ \& \ \omega < Cd(I) < \alpha$

(ii) $f \hat{e} (A(\alpha,I) \hat{} A(\alpha,I)) \hat{} I$

(iii) $a \hat{e} A(\alpha,I)$

Da har man at $\{<f(w)"a(w), w>: w \hat{e} I\} \hat{e} A(\alpha,I)$

Bevis: Den andre forutsetningen i dette teoremet impliserer den andre forutsetningen i Teorem 10.32. **QED**.

I det følgende skriver vi "xE(w)y" istedet for å bruke det mer klumsete uttrykket "x e;(w,I) y". man kunne ha brukt andre skrivemåter, for eksempel "<x,y>êE(w)" eller "<x,y>êe;(w,I)", men jeg tror ikke det vil føre til formler som er særlig lettere å lese. Vårt neste teorem viser at den egenskapsteoretiske versjonen av uendelighetsaksiomet holder i det kumulative hierarki. Det følgende teorem vil med andre ord være av relevans når vi skal

Teorem 10.34 Anta Inacc(α). Definer c0 ved: $c0 = \{<A(\omega,I),w>: w \hat{e} I\}$. Da holder følgende:

(a) $c0 \hat{e} A(\alpha,I)$

(b) $(Aw)(w \hat{e} I \rightarrow \{<\emptyset,r>: r \hat{e} I\} E(w) \ c0)$

(c) $(Aw)(w \hat{e} I \rightarrow (Ax)(xE(w)c0 \rightarrow (Ez)(zE(w)c0 \ \& \ (Ar)(rE(w)z \leftrightarrow rE(w)x \ v \ r=x))))$

Bevis: *Ad (a)*: Anta (1) $w \hat{e} I$ for vilkårlig w. Vi har fra definisjonen av c0 at (2) $c0(w) = A(\omega,I)$. herav kan man slutte at c0(w) Inkl A(ω,I) og derfor at $c0(w) \hat{e} Pt(A(\omega,I))$. Siden w var vilkårlig har vi $(Aw)(w \hat{e} I \rightarrow c0(w) \hat{e} Pt(A(\omega,I)))$. Dette impliserer at $c0(w) \hat{e} A(\omega+1,I)$. Men α er et utilgjengelig kardinaltall derfor har vi $\omega+1<\alpha$ og derfor $A(\omega+1)$ Inkl A(α,I). Det følger at $c0 \hat{e} A(\alpha,I)$. Dette viser at punkt (a) holder.

Ad (b): Anta for vilkårlig w at (1) $w \hat{e} I$. Vi skal vise at $\{<\emptyset,r>: r \hat{e} I\} E(w) \ c0$. Det vil være tilstrekkelig å vise at (2) $\{<\emptyset,r>: r \hat{e} I\} \hat{e} \ c0(w)$. Men $c0(w) = A(\omega,I)$. Det vil derfor være nok å vise (3) $\{<\emptyset,r>: r \hat{e} I\} \hat{e} A(\omega,I)$. Sett per definisjon (4) $\emptyset = \{<\emptyset, r>: r \hat{e} I\}$. La r være et vilkårlig element der (5) $r \hat{e} I$. Da har vi ved hjelp av (3) og (4) at

$\emptyset(r)=\emptyset$ Inkl A(0,I). Siden r var vilkårlig har vi:$(Ar)(r \hat{e} I \rightarrow \emptyset(r) \hat{e} Pt(A(0,I)))$ og derfor at $\emptyset \hat{e} Pt(A(0,I)) \hat{} I$ Inkl A(1,I). Men $1<\omega$ og derfor A(1,I) Inkl A(ω,I). Det følger at $\emptyset \hat{e} A(\omega,I)$ og derfor at (3) holder. Dermed har vi gitt et bevis for punkt (b).

Ad (c): Anta (1) $w \hat{e} I \ \& \ xE(w)c0$ for vilkårlig x og w. Fra dette har vi ved hjelp av definisjonen av c0 at $x \hat{e} c0(w) = A(\omega,I)$. Da har vi $x \hat{e} UN/\gamma<\omega/A(\gamma,I)$. Det følger at (2) $x \hat{e} A(\gamma,I) \ \& \ \gamma<\omega$ for noe γ. Definer nå q(x,w) ved:

(3) $q(x,w) = \{<\{z: zE(w)x\} U \{x\}, w'>: \ w' \hat{e} I\}$

Siden $x \hat{e} A(\gamma,I)$ har vi åpenbart at {x} Inkl A(γ,I). Men vi har også om zE(w)x at $z \hat{e} A(\gamma,I)$. Det

© 2012 Morten Harboe Rognes

følger at (4) {z: zE(w)x}U{x} Inkl A(γ,I) og derfor, siden det følger fra (3) at
(Aw')(w'êI → q(x,w)(w') = {z: zE(w)x}U{x}), at
(5) q(x,w)(w)êPt(A(γ,I)) Inkl A(γ+1,I) Inkl A(ω,I). Herav kan vi slutte
(6) q(x,w)E(w) c0
Videre følger fra (3) at (Ar)(rE(w) q(x,w) ↔ rêq(x,w)(w) ↔ rE(w)x v r=x). Fra dette og (6) følger: (Ez)(zE(w)c0 & (Ar)(rE(w)z ↔ rE(w)x v r=x)). Men x,w var vilkårlige objekter slik oppfylte (1). Vi har derfor:
(Aw)(Ax)(wêI & xE(w)c0 → (Ez)(zE(w)c0 & (Ar)(rE(w)z ↔ rE(w)x v r=x)))
Dette viser at punkt (d) holder. **QED**.

Teorem 10.35 Anta Inacc(α). Definer (i) Ø;I = {<w,ø>: wêI}. Sett videre
(ii) e(x)= {<w,{x}U {z: z E(w)x>: wêI}. Definer f induktivt ved:
(iii) f(0) = Ø;I & f(n+1) = e(f(n)). Sett:
(iv) W = {f(n): nêω} & W+ = {<w, W>: wêI}
Da gjelder følgende:
(a) W+êA(α,I) & (Ar)(rêI →. Ø;I E(r) W+ & (Ay)(y E(r) W+ → e(y)E(r) W+))
(b) Er rêI har vi:
e(y) E(r) W+ ↔
(Ez)(zêW+(r) & (Aw)(wêI → (Au)(u E(w)z ↔. uE(w)y v u=y)))

Bevis: *Ad (a)*: Vi har (1) ø Inkl A(0,I) =ø. Det følger at (2) øêPt(A(0,I)) og derfor at
(3) Ø;IêPt(A(0,I))^I Inkl (A(1,I)). Vi ønsker å vise at (4) W Inkl A(ω,I). Med andre ord må vi vise at {f(n): nêω} Inkl A(ω,I). Dette innebærer at vi må vise: (+) (An)(nêω → f(n)êaA(ω,I)). Dette siste vises ved induksjon. Det er klart at (5) f(0) = Ø;IêA(1,I) Inkl A(ω,I). Anta f(n)êA(ω,I). Da har vi
f(n) êA(γ,I) for noe γ <ω. Anta wêI for vilkårlig w der wêI. Vi har da at f(n+1)=e(f(n)) og derfor at
f(n+1)(w)=e(f(n))(w) = {f(n)}U {z: z E(w) f(n)}. Det følger da at f(n+1)(w) Inkl A(γ,I) og derfor siden w var vilkårlig element i I at f(n+1)êPt(A(γ,I))^I Inkl A(γ+1,I) Inkl A(ω,I). Vi har derfor vist:
(An)(n<ω & f(n)êA(ω,I) → f(n+1)êA(ω,I)). Dette og (5) impliserer (+) og viser at (4) holder. Siden W Inkl A(w,I) har vi WêPt(A(ω,I)) og derfor at W+êPt(A(ω,I))^I Inkl A(ω+1,I). Siden α er et utilgjenelig kardinaltall har vi åpenbart at ω mindre en α og derfor ω+1<α. Det følger derfor at
(6) W+êA(α,I). Anta nå at r er vilkårlig element der (7) rêI. Da har vi
Ø;I E(r) W+ ↔ Ø;I ê W+(r) = W. Men Ø;I= f(0) ê{f(n): nêω} =W. Vi har derfor
(8) Ø;I E(r) W+. Anta for vilkårlig y at (9) y E(r) W+ Da har vi
yêW+(r) og derfor yêW. Da finnes nêω slik at y=f(n). I så fall har vi f(n)êW. men da har vi også at e(y)=e(f(n)) = f(n+1)êW og derfor e(y)êW+(r). Siden y var vilkårlig har vi
(9) (Ay)(y E(r) W+ → e(y) E(r) W+). Siden r var vilkårlig element slik at (7) har vi:
(10) (Ar)(rêI →. Ø;I E(r) W+ & (Ay)(y E(r) W+ → e(y) E(r) W+))
Fra (8) og (10) kan vi slutte at punkt (a) holder.
Ad (b): Anta (1) rêI . Vi viser først kondisjonalen mot høyre: Anta e(y) E(r) W+. Da har vi (2) e(y)êW+(r). Anta w er vilkårlig element der wêI. Da har vi for vilkårlig u at
(3) uE(w) e(y) ↔ uê e(y)(w) = {y}U {z: z E(w)y ↔ u=y v u E(w) y. Fra (2) og (3) følger høyre side i punkt (b). Anta på den annen side at det finnes z slik at
(4) zêW+(r) & (Aw)(wêI → (Au)(u E(w)z ↔. uE(w)y v u=y)) Da har vi zêW. Da har vi at Func(z) & Dom(z)=I. Videre følger fra (4) at (Aw)(wêI → z(w) = {u: u E(w)y} U

© 2012 Morten Harboe Rognes

{y}). Men fra dette og definisjonen av e(y) følger z=e(y) og derfor i lys av (4) at e(y) E(r) W+. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for punkt (b). **QED**.

Vi definerer " x=;w y" ved:

x=;w y ↔ x,yêA(α,I) & (Az)(zêx(w) ↔ zêy(w))

. x =;ey innebærer altså at egenskapene x og y har den samme ekstensjon i verdenen w.

Teorem 10.36 Anta (i) Inacc(α) & yêA(α,I) & rêI. Anta videre:

(ii) (Ax)(Az)(xE(r)y & zE(r)y & ¬(x=;r z) → ¬(Ev)(vE(r)x & vE(r)z))

(iii) (Ex)(xE(r) y)

(iv) (Ax)(xE(r)y → x(r)≠ø)

Gitt disse forutsetningene har man:

(Eu)(uêA(α,I) & (Az)(zE(r)y →

(Ep)(z =;r p & pêA(α,I) & (Eq)((Aw)(wE(r)u & wE(r)p. ↔ w=q)))))

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder.Siden yêA(α,I) & αêK;II følger det at det finnes γ der vi har (1) yêA(γ,I) & γ<α. Vi definerer nå a og b ved:

(2.1) a={x: xE(r) y}

(2.2) b= {{v: v E(r) x}: x E(r) y}

Fra forutsetning (iii) følger åpenbart at (3) a≠ø. Med andre ord finnes x slik at (4) x E(r) y. Fra dette og forutsetning (4) følger at det finnes v der vêx(r). Dette innebærer at v E(r) x. Fra (2) har vi zêb ↔ zê{{v: v E(r) x}: x E(r) y} ↔ (Ep)(z={v: v E(r) p} & p E(r) y. Setter vi nå z0= {v: v E(r) x} følger åpenbart ved hjelp av (4) at (Ep)(z0={v: v E(r) p} & p E(r) y) og derfor (5) b≠ø. Nå har man ved hjelp av forutsetning (ii):

(6) (Ax)(Az)(x,zêb & x≠z → xΩz=ø)

La oss vise at (6) holder: Anta x,zêb & x≠y. I lys av definisjonen av b følger da eksistensen av p og q slik x={v: v E(r) p} & p E(r) y og z={v: v E(r) q} & q E(r) y. Hadde vi nå p=;r q ville vi ha x=z. Vi har derfor ¬(p =;r q). Ved hjelp av forutsetning (ii) at ¬(Ev)(vE(r)p & vE(r)p)). Men dette innebærer åpenbart at xΩy=ø.

Anta for vilkårlig x at xêb. Da finnes p slik at x={z: zE(r)p} & pE(r) y. Fra dette og forutsetning (iv) følger p(r) ≠ø. Dette innebærer at det finnes z slik at zêp(r). Men da følger z E(r) p og derfor at x≠ø. Vi har derfor også:

(7) (Ax)(xêb → x≠ø)

Fra (5), (6) og (7) følger ved hjelp av utvalgsaksiomet at det finnes en mengde c med følgende egenskap:

(8) (Ay)(yêb → (Eu)(cΩy={u}))

La oss sette (9) d= cΩUN(b). Da følger fra (8):

(9) (Ay)(yêb → (Eu)(cΩ UN(b) Ωy = {u})). Vi har naturlig nok at M(d). Definer nå u0 ved: (10) u0={<d,j>:jêI}. Vi skal først vise at (11) u0êA(α,I).

Det vil være tilstrekkelig å vise (12) d Inkl A(γ,I). Anta têd for vilkårlig t. Da følger têcΩUN(b). Det følger at têUn(b) og derfor at det finnes s slik at tês & sêb. Siden sêb har vi at det finnes noe p slik at s={v: vE(r)s} & s E(r) y. Siden tês følger t E(r) s. Siden yêA(γ,I) har vi ved hjelp av Teorem 10.1 at sêA(γ,I). Siden t E(r) s følger ved hjelp av det samme teorem det vi ønsker, nemlig têA(γ,I). Dette viser at (12) holder.

Vi vil nå bevise:

(13) (Az)(zE(r)y →

(Ep)(z =;r p & pêA(γ,I) & (Eq)((Aw)(wE(r)u0 & wE(r)p. ↔ w=q)))))

Anta derfor z E(r)y. Da har vi z(r)êb Dette impliserer at det finnes p

© 2012 Morten Harboe Rognes

slik at z(r) ={v: vE(r) p} & p E(r) y. Da pêA(α,I). Fra det at z(r)êb følger ved hjelp av (8) at
cΩ {v: vE(r) p} = {u} for noe u. Anta vêz(r). Siden z(r)êb har vi da vêUN(b).
Dette innebærer at z(r)= {v: vE(r) p} Inkl UN(b) og derfor har vi
cΩ UN(b)Ω{v: vE(r) p} ={u}. Dette innebærer dΩ{v: vE(r) p} ={u}
Da wE(r)u0 & wE(r)p ↔ wêdΩ{v: vE(r) p} ↔ w=u. Fra dette følger, siden vi har z =;r p og pêA(α,I) , at
(Ep)(z =;r p & pêA(α,I) & (Eq)((Aw)(wE(r)u0 & wE(r)p. ↔ w=q))))).
Dette viser at (13) holder. Fra (13) og (11) følger så konklusjonen i satsen. **QED**.

Vi skal innføre nok et begrep. Vi definerer x e+ y slik:

Definisjon 10.10 x e+y ↔ Eg(x) & Eg(y) & x êUN/wêI/(y(w))

Det følgende teorem er av interesse når vi skal vise at TA28 holder i standardmodellen.

Teorem 10.37 Eg(y) & (Ex)(xe+y) → (Ez)(ze+y & ¬(Ev)(v e+ z & ve+y))

Bevis: Anta (1) Eg(y) & (Ex)(xe+y). Ved hjelp av definisjonen av e+ har vi da
(2) UN/wêI/(y(w)) ≠ø. Det følger at det finnes x, w slik at (3) xê y(w) & wêI. Siden Eg(y) følger det at det må finnes γ slik at (4) yêA(γ,I). Fra dette og (3) har vi ved hjelp av Teorem 10.1 at xê A(γ,I). Vi har derfor at (5) UN/wêI/(y(w)) Inkl A(γ,I).
Sett per definisjon: (6) d= UN/wêI/(y(w)) . Videre setter vi:
(7) j = μα(αê {ρ;I(x): xêd}). Vi har {ρ;I(x): xêd} Inkl On og i lys av (2) at d≠ø. Det må derfor finnes noe x0 slik at (8) x0êd & ρ;I(x0) = j.
Anta nå for reduktio ad absurdum at det finnes v der (9) ve+x0 & ve+y. I lys av definisjonen av e+ må det da finnes w1, w2êI slik at
(10) vêx0(w1) & vêy(w2) Fra den andre konjunkten i (10) har vi vêd og derfor at
(11) ρ;I(v) >=j Nå har vi x0êd = UN/wêI/(y(w)) Inkl A(γ,I) ved hjelp av (8), (6) og (5). Derfor (12) x0êA(γ,I). Fra dette, den første konjunkten i (10) og Teorem 10.11 kan man slutte: ρ;I(v) < ρ;I(x0). Fra dette, (8) og (11) har vi ρ;I(v) < j =<ρ;I(v) som åpenbart er absurd. Det kan derfor ikke finnes v slik at (9). Vi har derfor:
(12) ¬(Ev)(ve+x0 & ve+y) siden x0êd ifølge (8) har vi x0êUN/wêI/(y(w)) og derfor x0êy. Fra dette og (12) følger (Ez)(ze+y & ¬(Ev)(v e+ z & ve+y)). **QED**.

Det følgende teorem er av relevans når vi skal vise at at TA29 holder i standardmodellen for L;a:

Teorem 10.38 Anta xêA(α,I) & Inacc(α). Definer c ved å sette:
c(x)= {<w, {z: ze+x}>: wêI}. Da har vi at c(x)êA(α,I)

Bevis: Anta (1) xêA(α,I) & Inacc(α). Siden αêK;II har vi at det finnes γ slik at
(2) xêA(γ,I) & γ<α . Anta nå for vilkårlig z at ze+x. Da har har vi ved hjelp av definisjonen av e+ at zêUN/wêI/(x(w)). Det må derfor finnes w'êI slik at zêx(w'). Men fra dette, (2) og Teorem 10.1 kan vi slutte: zêA(γ,I). Det følger at (3) {z: ze+x} Inkl A(γ,I). Herav følger {z: ze+x}êPt(A(γ,I)). Men fra definisjonen av c følger (Aw)(wêI → c(w)(x)={z: ze+x})
Vi har drefor at c(x)ê Pt(A(γ,I))^I Inkl A(γ+1,I) Inkl A(α,I). **QED**.

På samme vis som det foregående teorem var relatert til TA29 er det følgende teorem av

© 2012 Morten Harboe Rognes

relevans når det gjelder å vise at TA30 er gyldig i standardmodellen for L;a.

Teorem 10.39 Anta xêA(α,I) & Inacc(α). Definer c ved å sette:
c(x)= {<w, {z: (Ev)(ze+v & ve+x)}>: wêI}. Da har vi at c(x)êA(α,I)

Bevis: Anta (1) xêA(α,I) & Inacc(α). Siden αêK;II har vi at det finnes γ slik at (2) xêA(γ,I) & γ<α . Anta nå for vilkårlig z at (3) (Ev)(ze+v & ve+x). Da vil det finnes v slik at (4) ze+v & ve+x . Fra den siste konjunkten i (4) har vi ved hjelp av definisjonen av e+ at vêUN/wêI/(x(w)). Det må derfor finnes w'êI slik at vêx(w'). Men fra dette, (2) og Teorem 10.1 kan vi slutte: (5) vêA(γ,I). Men fra den første konjunkten i (4) følger at det må finnes w"êI slik at zêv(w"). Fra dette og (5) kan vi slutte zêA(γ,I). Det følger at {z: (Ev)(ze+v & ve+x)} Inkl A(γ,I). Herav følger: {z: (Ev)(ze+v & ve+x)}êPt(A(γ,I)). Men fra definisjonen av c følger

(Aw)(wêI → c(w)(x)={z: z(Ev)(ze+v & ve+x)})

Vi har drefor at c(x)ê Pt(A(γ,I))^I Inkl A(γ+1,I) Inkl A(α,I). **QED**.

§11 Bevis for at ethvert teorem i MZFC er gyldig i standardmodellen M for L;a

Er α en formel i L;a innebærer MZFC|- α at α er et teorem i MZFC. Vi skal i denne paragrafen vise den følgende sats som sier at ethvert teorem i MZFC er gyldig i standardmodellen for M. Satsen kan formuleres slik:

Teorem 11.1 Anta M= <A(μ;0,I), I, d> er standardmodellen for L;a. Da har vi for enhver formel α i L;a at

MZFC|-α → M ⊨α

Dette er naturligvis et hovedresultat i dette arbeidet. Beviset er meget langt siden vi gjennomfører det temmelig detaljert og det krever at man viser at alle de tredve formlene som utgjør hovedaksiomene i MZFC er gyldige i standardmodellen.

Bevis:

I det følgende betegnes menden av alle navnene i L;a+ med N(L;a+)

Ad TA1: Vi må i dette tilfelle vise (1) M ⊨ (Nec(F) & Nec(F→ G) → Nec(G)). Det vil si: (Aw)(wêI → <M,w> ⊨ (Nec(F) & Nec(F→ G) → Nec(G))). Anta derfor wêI for vilkårlig wêI. Anta videre at (2) <M,w> ⊨Nec(F) & Nec(F→G). Da har vi (3) (Aw')(w'êI → <M,w> ⊨ F) & (Aw')(w'êI → <M,w> ⊨ F→G). Fra dette følger umiddelbart (Aw')(w'êI → <M,w> ⊨ G) og derfor <M,w> ⊨ Nec(G). Dette viser at TA1 holder.

Ad TA2: Vi må først vise at (1) M ⊨ Pos(F) → Nec(Pos(F)). Anta derfor for vilkårlig wêI at (2) <M, w> ⊨Pos(F). Anta for reduktio ad absurdum at (3) ¬(<M,w> ⊨ Nec(Pos(F))). Da har vi at det må finnes w' slik at (4) <M,w'> ⊨ ¬Pos(F). Da ¬(<M,w'> ⊨ Pos(F)). Dette impliserer (5) (Aw")(w"êI → <M,w'> ⊨ ¬F) Fra (2) følger <M,w'"> ⊨ F for noe w'"êI. Men fra dette og (5) har vi åpenbart <M,w'"> ⊨F <M,w'"> ⊨ ¬F som er umulig. Det følger at (3) er usann og derfor at (1) holder.

Vi må dessuten vise M ⊨ Nec(F) → Nec(Nec(F)). Anta for vilkårlig w at (6) <M,w> ⊨Nec(F). Fra dette følger: (7) (Aw')(w'êI → <M,w'> ⊨ F). Anta for reduktio at

© 2012 Morten Harboe Rognes

absurdum at ¬(<M,w> ⊨ Nec(Nec(F))). Etter valuasjonsregelen for Nec følger da at det må finnes w'êI slik at <M,w'> ⊨ ¬Nec(F). Dette impliserer i sin tur ved hjelp av valuasjonsreglene for ¬ og Nec at det finnes w"êI slik at <M,w"> ⊨ ¬F. Men siden w"êI har vi da ved hjelp av (7) at <M,w"> ⊨ F som åpenbart gir oss en motsigelse. Vi har dermed levert et fullstendig bevis for at TA2 er gyldig i standardmodellen for L;a.
Ad TA3: Vi må vise (1) M ⊨ Nec(α) → α. Anta <M,w> ⊨Nec(α) for vilkårlig wêI. Da følger: (Aw')(w'êI → <M,w'> ⊨α). Men herav <M,w> ⊨α.. Dette viser at (1) holder.

Ad TA4: Dette er den såkalte Barcan-formel. Det er nok å vise at dersom wêI og at man har <M,w> ⊨ (Ax)Nec(α) hvis og bare hvis <M,w> ⊨ Nec((Ax)α). Anta derfor at w er et vilkårlig element i I og at (1) <M,w> ⊨ (Ax)Nec(α) Ved hjelp av valuasjonsregelen for allkvantoren er dette ekvivalent med: (1) (Ai)(iêN(L;a+) → <M,w> ⊨ Nec(α[i])). Videre følger, ved hjelp av valuasjonsregelen for Nec, at (1) er ekvivalent med:

(2) (Ai)(iêN(L;a+) → (Aw')(w'êI → <M,w'> ⊨ α[i])) Dette er ekvivalent med:

(3) (Ai)(Aw')(iêN(L;a+) & w'êI → <M,w'> ⊨ α[i])

Dette er i sin tur ekvivalent med:

(4) (Aw')(w'êI → (Ai)(iêN(L;a+) →<M,w'> ⊨ α[i])) med andre ord:

(5) (Aw')(w'êI → <M,w'> ⊨ (Ax)α) som holder hvis og bare hvis <M,w> ⊨ Nec(Ax)α. Dette viser at TA4 holder i standardmodellen.

Ad TA5: Vi har om wêI at <M,w> ⊨ Nec(α) ↔ (Aw')(w'êI → <M,w> ⊨α) ↔
¬(Ew')(w'êI & ¬(<M,w> ⊨ α)) ↔ ¬(Ew')(w'êI & <M,w> ⊨ ¬α) ↔
¬(<M,w> ⊨ Pos(¬α)) ↔ <M,w> ⊨ ¬Pos(¬α)
Dette viser at TA5 er gyldig i standard modellen.

Ad TA6: Anta i,j er vilkårlige navn i L;a+. Anta (1) <M,w> ⊨ i=j. Da følger ved hjelp av valusajonsregelen for = at (2) <Ref;<M,w>(i) Ref;<M,w>(j)>êΦ(=)(w). Herav følger så <d(i),d(j)>êΦ(=)(w) og derfor at (3) d(i) = d(j) i kraft av definisjonen av Φ . Anta nå for vilkårlig w' at (4) w'êI. Fra (3) og definisjonen av Φ har vi da <d(i),d(j)>êΦ(=)(w') og derfor <Ref;<M,w'>(i) Ref;<M,w'>(j)>êΦ(=)(w'). Herav <M,w'> ⊨ i=j. Siden w' var vilkårlig følger: (Aw')(w'êI → <M,w'> ⊨ i=j) og derfor <M,w> ⊨ Nec(i=j). Siden i,j var vilårlige navn har vi M ⊨ x=y → Nec(x=y).

Anta i,j er vilkårlige navn i L;a+. Anta (4) <M,w> ⊨ ¬(i=j). Da følger: ¬(<Ref;<M,w>(i) Ref;<M,w>(j)>êΦ(=)(w)) og derfor (5) ¬(d(i) = d(j)). Anta w'êI for vilkårlig w' êI. Fra (5) og definisjonen av Φ har vi da ¬(<d(i),d(j)>êΦ(=)(w')) og derfor:

¬(<Ref;<M,w'>(i) Ref;<M,w'>(j)>êΦ(=)(w')). Herav <M,w'> ⊨ ¬(i=j). Siden w' var vilkårlig følger: (Aw')(w'êI → <M,w'> ⊨ ¬(i=j)) og derfor <M,w> ⊨ Nec(¬(i=j)). Siden i,j var vilårlige navn har vi M ⊨ ¬(x=y) → Nec(¬(x=y)). Dette viser at TA6 er gyldig i standardmodellen.

Ad TA7: Vi må vise (+) M ⊨ (Ax)(At(x) → Nec(At(x)). Anta wêI for vilkårlig w og at i er et vilkårlig navn i L;a+. Det vil da være tilstrekkelig å bevise:

(1) <M,w> ⊨ At(i) → Nec(At(i)). Anta derfor (2) <M,w> ⊨ At(i). Ved hjelp av valuasjonsregelen for At følger fra (2) at Ref;<M,w>(i)êΦ(At)(w). Herav følger så ved hjelp av definisjonen av Φ at (3) d(i)êA(μ0, I). Det vil nå være tilstrekkelig å vise at (3) <M,w> ⊨ Nec(At(i)). Anta derfor at w'êI for vilkårlig w'. Fra (3) og definisjonen av Φ og valuasjonsregelen for navn følger Ref;<M,w'>(i)êΦ(At)(w'). Men herav har vi at (3) holder. Vi har dermed vist (+). Vi må også vise M ⊨ (Ax)At(x). Det vil være nok å vise at vi for alle

© 2012 Morten Harboe Rognes

navn i og enhver wêI har <M,w> ⊨ At(i). Anta i er et vilkårlig navn og w et vilkårlig element i I. Da har vi i kraft av definisjonen av d at d(i)êA(μ;0, I). Videre har vi fra dette ved hjelp av valuasjonsregelen for i og definisjonen av Φ at Ref;<M,w>(i)=d(i) og Φ(At)(w)= A(μ;0, I). Det følger at Ref;<M,w>(i) ê Φ(At)(w). Herav kan man ved hjelp av valuasjonsregelen for At slutte at: <M,w> ⊨ At(i). Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for at TA7 holder i standardmodellen for L;a.

Ad TA8: Vi må vise (1) M ⊨ At(y) &xεy → At(x). Anta i,j er vilkårlige navn i L;a+ og w et vilkårlig element i I Anta <M,w> ⊨ At(i) & jεi. Da har man <M,w> ⊨ jεi og derfor ved hjelp av valuasjonsregelen for ε: <d(j), d(i)>êΦ(ε)(w). Dette impliserer ved hjelp av definisjonen av Φ at d(j), d(i)êA(μ;0,I) & d(j)êd(i)(w). Siden d(j)êA(μ;0, I) følger igjen ved hjelp av definisjonen av Φ(At) at d(j)êΦ(At)(w). Siden Ref;<M,w>(j) =d(j) har vi Ref;<M,w>(j) êΦ(At)(w) og derfor ved hjelp av valuasjonsregelen for At: <M,w> ⊨ At(j). Det følger at (1) holder. Dette viser at TA8 er gyldig i standardmodellen.

Ad TA9: Vi må vise: (1) M ⊨ ¬At(y) → Nec(¬At(y)). La i være et vilkårlig navn i L;a+ og w vilkårlig mulig verden. Anta (2) <M,w> ⊨ ¬At(i). Da har vi ved hjelp av valuasjonsreglene for ¬ og At : (3) ¬(d(i)êA(μ;0, I)). Anta for vilkårlig w' at w'êI. Da har vi ved hjelp av definisjonen av Φ at Φ(At)(w')= A(μ;0, I). Videre har vi at Ref;<M,w')(i) =d(i). Fra disse to forhold og (3) følger ¬(<Ref;<M,w')(i) êΦ(At)(w')) fra dette og valuasjonsregelen for At følger videre: ¬(<M,w'> ⊨ At(i)) med andre ord <M,w'> ⊨ ¬At(i). Siden w' var vilkårlig har vi (Aw')(w'êI → <M,w'> ⊨ ¬At(i)). Fra dette følger: <M,w> ⊨ Nec(¬At(i)). Dette viser at (1) holder.

Ad TA10: Vi skal først vise (1) M ⊨ (xεy → At(y)). Dette er relativt trivielt. Anta for vilkårlige navn i,j i L;a+ og vilkårlig wêI at <M,w> ⊨ iεj. Ved hjelp av valuasjonsreglene for ε og navn har vi da <Ref;<M,w>(i), Ref;<M,w>(j)>êΦ(ε)(w). Fra dette har vi: <d(i),d(j)>êΦ(ε)(w). Herav følger ved hjelp av definisjonen av Φ at d(j)êA(μ;0, I). Da har vi naturligvis at d(j)êΦ(At)(w) og derfor Ref;<M,w>(i)êΦ(At)(w). Herav følger så <M,w> ⊨ At(j). Siden i,j og w var henholdsvis vilkårlige navn og en vilkårlig verden følger det at (1) holder.

Vi må så vise at (2) M ⊨ (Ax)(xêλy(α) ↔ (Ez)(xεz & z=λy(α))). Anta w er et vilkårlig element i I og at i er et vilkårlig navn. Anta α' er som α men med med variablene erstattet uniformt med navn, i settes inn for alle forekomster av x. Da vil det være nok å vise:

(3) <M,w> ⊨ iêλy(α') ↔ <M,w> ⊨(Ez)(iεz & z= λy(α').

(a) Vi viser først kondisjonalen mot høyre: Anta (4) <M,w> ⊨ iελy(α'). Ved hjelp av valuasjonsregelen for ε følger da:

(5) <Ref;<M,w>(i), Ref;<M,w>(λy(α'))>êΦ(ε)(w). Fra dette og definisjonen av Φ kan man så slutte: (6) d(i)êA(μ;0, I) & Ref;<M,w>(λy(α'))êA(μ;0, I). La oss sette per definisjon: (7) f = Ref;<M,w>(λy(α')). Da har vi ved hjelp av (6) og (5) at (8) d(i)êf(w) & fêA(μ;0,I). Fra (8) og valuasjonsregelen for λ-abstrakter følger:

(9) f = λ/wêI/((Mg(d(j): <M,w> ⊨ α';y[j])) Siden f êA(μ;0, I) vinnes det et entydig bestemt navn på f i L;a+, nemlig d;-1(f). Fra (5) og (7) har vi også d(i)êf(w). Fra dette kan vi ved hjelp av valuasjonsregelen for ε slutte (10) <M,w> ⊨ iεd;-1(f). Fra (6), (7) og valuasjonsregelen for = kan man videre slutte <d;-1(f), Ref;<M,w>(λy(α'))>êΦ(=)(w). Fra dette følger (11) <M,w> ⊨ d;-1(f)= λy(α') Fra dette, (10) og valuasjonsreglene for & og E har vi <M,w> ⊨ (Ez)(iεz & z= λy(α')). Dette viser at kondisjonalen mot høyre i (3) holder.

© 2012 Morten Harboe Rognes

(b) Vi må vise inklusjonen mot venstre i (3): Anta (12) <M,w> ⊨(Ez)(iεz & z= λy(α'). Ved hjelp av valuasjonsreglene for E og & følger herav at det finnes et navn j i L;a+ slik at (13) <M,w> ⊨ iεj & <M,w> ⊨ j = λy(α'). Fra den andre konjunkten her følger: (14) <d(j), Ref;<M,w>(λy(α'))>êΦ(=)(w). Fra dette har vi så ved hjelp av definisjonen av Φ at (15) d(j) êA(μ;0, I) & Ref;<M,w>(λy(α')) êA(μ;0, I) og dessuten

(16) d(j) = Ref;<M,w>(λy(α')). Fra den første konjunkten i (13) følger <d(i),d(j)>êΦ(ε)(w) Fra dette og (16) har vi: <d(i), Ref;<M,w>(λy(α'))>êΦ(ε)(w) og derfor <M,w> ⊨ iελy(α'). Dette viser at kondisjonalen mot venstre i (3) holder.

Vi har dermed vist at TA10 holder i standardmodellen.

Ad TA11: Vi må vise: (1) M ⊨ At(y) & At(z) & Nec((Ax)(xεy ↔ xεz)) → y=z. La w være en vilkårlig mulig verden og i,j to vilkårlige navn i L;a+. Anta (2) <M,w> ⊨ At(i) & At(j) og anta (3) <M,w> ⊨ Nec((Ax)(xεi ↔ xεj)). Det vi da være tilstrekkelig å vise d(i) =d(j). Fra (2) følger ved hjelp av valusajonsregelen for At at (4) d(i), d(j)êA(μ;0, I). Fra (3) følger:

(Aw')(w'êI → <M,w'> ⊨ (Ax)(xεi ↔ xεj)) Fra dette har vi så ved hjelp av valusajonsreglene for A og ε at

(Aw')(Ar)(w'êI & rêN(L;a+) → d(r)êd(i)(w) ↔ d(r)êd(j)(w)). Men fra dette følger siden d avbilder N(L;a+) en-entydig på A(μ;0,I) at vi har:

(5) (Aw')(w'êI → (Ax)(xêA(μ;0,I) →. xêd(i)(w) ↔ xêd(j)(w)))

Fra (4) følger Eg(d(i)) & Eg(d(j)). Fra dette, (5) og Teorem 10.20 følger så: d(i)=d(j). Dette viser at (1) holder og at TA11 er gyldig i standardmodellen for L;a.

Ad TA12: Det er nødvendig å vise at: (1) M ⊨ At(λx(F(x))) → (yελx(F(x)) ↔ F(y))
Anta w er et vilkårlig element i I og at (2) <M,w> ⊨ At(λx(F(x))). Anta i er et vilkårlig navn i L;a+. Ved hjelp av valuasjonsregelen for At: (3) Ref;<M,w>(λx(F(x))êΦ(At)(w). Dette impliserer: (4) Ref;<M,w>(λx(F(x))êA(μ;0, I). I lys av valuasjonsregelen for λ kan vi da slutte at det finnes f slik at (5) f = λ/wêI/(Mg(d(i): <M,w> ⊨ F(x)[i]))

Nå har vi: <M,w> ⊨ iελx(F(x)) ↔ <d(i), Ref;<M,w>(λx(F(x))>êΦ(ε)(w)
↔ <d(i), f>êΦ(ε)(w)
↔ d(i)êf(w) = (Mg(d(i): <M,w> ⊨ F(x)[i])
↔ <M,w> ⊨ F(i)

Vi har derfor: <M,w> ⊨ iελx(F(x)) ↔ F(i). Dette viser at (1) holder og dermed at TA12 er gyldig i standardmodellen.

Ad TA13: Det er nødvendig å vise at: M ⊨ λx(F(x))εy → (Ez)(z=λx(F(x)) & zεy)
La w være et vilkårlig element i I og la i være et vilkårlig navn. Anta
(1) <M,w> ⊨ λx(F(x))εi. Da har man ved hjelp av valuasjonsregelen for ε at
(2) <Ref;<M,w>(λx(F(x))), d(i)>êΦ(ε)(w). Dette impliserer ved hjelp av definisjonen av Φ at
(3) Ref;<M,w>(λx(F(x))), d(i)êA(μ;0, I) og derfor ved hjelp av valuasjonsregelen for λ at det finnes f slik at

(4) Ref;<M,w>(λx(F(x)))= f = λ/wêI/((Mg(d(i): <M,w> ⊨ F(i)).

Fra (2) og definisjonen av Φ(ε) følger videre: (5) fêd(i)(w). Siden fêA(μ;0, I) har vi at
(6) d;-1(f)êN(L;a+). Fra (4), (5), (6) og valuasjonsregelen for ε følger
(7) <M,w> ⊨ d;-1(f)εi. Fra (3), (4) og valuasjonsregelen for = følger:

(8) <M,w> ⊨ d;-1(f) = λx(F(x)). Fra (7), (8) og valusajonsreglene for & og E har vi <M,w> ⊨ (Ez)(z=λx(F(x)) & zεi). Dette viser at TA13 er gyldig i standardmodellen.

© 2012 Morten Harboe Rognes

Ad TA14: Vi må bevise to påstander: (1) M ⊨ y= λx(F(x)) → Nec(y= λx(F(x))) og (2) M ⊨ y≠ λx(F(x)) → Nec(y≠λxF(x)).

(a) Vi viser først at (1) holder. Anta w er en vilkårlig verden i I og at i er et vilkårlig navn i L;a+. Anta (3) <M,w> ⊨ i= λx(F(x)). Da har vi ved hjelp av valuasjonsregelen for = og definisjonen av Φ(=) at (4) d(i), Ref;<M,w>(λx(F(x)))êA(μ;0, I) og at (5) d(i) = Ref;<M,w>(λx(F(x))). I lys av av (4) og valusajonsregelen for λ-abstrakter har vi at det må finnes f slik at (6) Ref;<M,w>(λx(F(x))) =f og

(7) f=λ/wêI/((Mg(d(i): <M,w> ⊨ F(i)))

Anta nå at w'êI for vilkårlig w. Da har vi at ved hjelp av valuasjonsregelen for λ:

Ref;<M,w'>(λx(F(x))) = λ/wêI/((Mg(d(i): <M,w> ⊨ F(i))) siden (7) holder, og f er med i A(μ;0, I) ifølge (6) og (4). Det følger derfor ved hjelp av (5),(6) og (7) at

Ref;<M,w'>(λx(F(x))) = d(i) = Ref;<M,w'>(i). Fra dette kan man ved hjelp av valuasjonsregelen for = og definisjonen av Φ(=) slutte at <M,w'> ⊨ i = λx(F(x)). Siden w' var et vilkårlig element i I har vi <M,w> ⊨ Nec(i=λx(F(x))). Dette viser at (1) holder.

(b) La oss så vise riktigheten av (2). Anta for reduktio ad absurdum at det finnes wêI og iêN(L;a+) slik at (8) <M,w> ⊨ i≠λx(F(x)) og (9) ¬(<M,w> ⊨ Nec(i≠λx(F(x))). Fra (9) følger ved hjelp av valuasjonsregelen for ¬ at <M,w> ⊨ ¬ Nec(i≠λx(F(x)). Dette innebærer at det finnes en w' slik at (10) ¬<M,w'> ⊨ ¬(i=λx(F(x)). Dette impliserer i sin tur: <M,w'> ⊨ i=λx(F(x)). Fra dette følger ved hjelp av valusajonsregelen for = at <d(i), Ref;<M,w'>(λx(F(x)))>êΦ(=)(w). Herav har vi etter definisjonen av Φ

(11) d(i), Ref;<M,w'>(λx(F(x)))êA(μ;0, I) og at (12) d(i) = Ref;<M,w'>(λx(F(x))). I lys av av (4) og valusajonsregelen for λ-abstrakter har vi at det må finnes f slik at (13) Ref;<M,w'>(λx(F(x))) =f og

(14) f=λ/wêI/((Mg(d(i): <M,w> ⊨ F(i)))

Siden wêI har vi (15) Ref;<M,w>(λx(F(x))) = λ/wêI/((Mg(d(i): <M,w> ⊨ F(i))) om λ/wêI/((Mg(d(i): <M,w> ⊨ F(i)))êA(μ0,I). Men fra (11),(13) og (14) følger at

(16) f=λ/wêI/((Mg(d(i): <M,w> ⊨ F(i))) êA(μ;0,I). Fra dette og (15) følger (17) Ref;<M,w>(λx(F(x))) =f . Videre følger fra (12) og (13) at d(i)=f. Vi har derfor Ref;<M,w>(λx(F(x))) =d(i) = Ref;<M,w>(i). Herav følger ved hjelp av valusjonsregelen for = og definisjonen av Φ at <M,w> ⊨ i = λx(F(x)). Men dette strider åpenbart mot (8). Dermed har vi vist at (2) holder. Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for at TA14 er gyldig i standardmodellen.

Ad TA15: Vi må vise: M ⊨ At(y) → [Nec((Ax)(xεy ↔ F(x))) ↔ y=λx(F(x))]. La wêI for vilkårlig w og anta i er et vilkårlig navn i L;a+. Anta (1) <M,w> ⊨ At(i). Da har vi ŝom i tidligere bevis: (2) d(i)êA(μ;0, I).

(a) Vi viser først kondisjonalen mot høyre i kondisjonalen mot høyre i konsekventen i TA15: Anta (3) <M,w> ⊨ Nec((Ax)(xεi ↔ F(x)). Dette er ekvivalent med:

(4) (Aw')(w'êI → <M,w'> ⊨ (Ax)(xεi ↔ F(x))) ↔
(Aw')(Aj)(w'êI & jêN(L;a+) → <M,w'> ⊨ jεi ↔ <M,w'> ⊨F(j)) ↔
(Aw')(w'êI → (Az)(zêd(i)(w') ↔ <M,w'> ⊨ F;x[d;-1(x)])) ↔
(Aw')(w'êI → d(i)(w') = Mg(d(j): <M,w'> ⊨ F;x[j])) ↔
d(i) = λ/wêI/(Mg(d(j): <M,w'> ⊨ F;x[j])) ↔
<M,w> ⊨ i = λx(F(x)).

Fra dette fremgår det at <M,w> ⊨ Nec((Ax)(xεi ↔ F(x)) ↔ <M,w> ⊨ i = λx(F(x)). Herav: <M,w> ⊨ Nec((Ax)(xεy ↔ F(x))) ↔ y=λx(F(x)). Siden w var vilkårlig element i I og i et vilkårlig navn slik at (1) følger det at TA15 er gyldig i standardmodellen for L;a.

© 2012 Morten Harboe Rognes

Ad TA16: Vi må i dette tilfellet vise:

M ⊨ At(y) → (Ez)(At(z) & (Ax)(xεz → Nec(xεz)) &
(Ax)(¬(xεz) → Nec(¬(xεz))) & (Aw)(wεz ↔ wεy))

Anta w, i er vilkårlige entiteter slik at (1) wêI & iêN(L;a+) og (2) <M,w> ⊨ At(i). Det følger da ved hjelp av valuasjonsregelen for At: (3) d(i)êA(μ;0 ,I). Definer nå z0 ved:

(4) z0 = λ/w'êI/(d(i)(w)). Vi må vise at z0êA(μ;0, I). Fra (3) følger, siden μ;0 er et utilgjengelig kardinaltall at d(i)ê A(γ,I) for noe γ <μ;0. Anta w'êI for vilkårlig w'. og anta for vilkårlig z at zêd(i)(w'). Da har vi ved hjelp av Teorem 10.1 at zêA(γ,I). Det følger at

(5) (Aw')(w'êI → d(i)(w') Inkl A(γ,I)). Siden wêI, ifølge (1), kan man slutte at d(i)(w) Inkl A(γ,I). Herav har vi: d(i)(w)êPt(A(γ,I)) og følgelig at har vi at z0êPt(A(γ,I))^I, siden z0 er en konstantfunksjon. Da (6) z0êA(γ+1) Inkl A(μ;0, I). Vi har derfor at d;-1(z0)êN(L;a+) og følgelig, om vi per definisjon setter j0=d;-1(z0), at (7) <M,w> ⊨ At(j0). Det vil nå være tilstrekkelig å vise følgende tre påstander:

(8.1) <M,w> ⊨ (Ax)(xεj0 → Nec(xεj0)

(8.2) <M,w> ⊨ (Ax)(¬(xεj0) → Nec(¬(xεj0)))

(8.3) <M,w> ⊨ (Ax)(xεj0 ↔ xεi)

Ad (8.1): Anta k er et vilkårlig navn og at <M,w> ⊨ kεj0. Da følger d(k)êd(j0)(w) med andre ord at (9) d(k)êz0(w) = d(i)(w). Anta for vilkårlig w" at w"êI. Da har vi z0(w")= d(i)(w) og derfor at d(k)êz0(w"). Herav d(k)êd(j0)(w) og følgelig <M,w"> ⊨ kêj0. Vi har vist, siden w" var vilkårlig, (Aw")(w"êI → <M,w"> ⊨ kεj0). Det følger at <M,w> ⊨ Nec(kεj0). Siden k var vilkårlig navn har man at (8.1) holder.

Ad (8.2): Anta det for reduktio ad absurdum at det finnes et navn k slik at (9) <M,w> ⊨ ¬(kεj0) og (10) ¬(<M,w> ⊨ Nec(¬(kεj0)). Fra (10) følger at det må finnes w" der w"êI og <M,w"> ⊨ kεj0. Da følger at d(k)εd(j0)(w")= z0(w") = d(i)(w). På den annen side har vi også, ved hjelp av definisjonen av z0 at z0(w)= d(i)(w). Det følger derfor at d(k)êd(j0)(w) og derfor <M,w> ⊨ kεj0 som åpenbart strider mot (9). Det følger at vi for alle navn k må ha at <M,w> ⊨ ¬(kεj0) → Nec(¬(kεj0)). Dette innebærer at (8.2) holder.

Ad (8.3) Anta k er et vilkårlig navn. Da har vi:

<M,w> ⊨ kεj0 ↔ d(k)êd(j0)(w) ↔ d(k)êz0(w) ↔ d(k)êd(i)(w) ↔ <M,w> ⊨ kεi.

Dette viser at (8.3) holder. Vi har dermed gitt et fullstendi bevis for TA16 er gyldig i standardmodellen.

Ad TA17: Det er nødvendig å vise at (+) M ⊨ At(λx(F(x))) ↔ (Ey)(y= λx(F(x))). Anta for vilkårlig w at (1) wêI og (2) <M,w> ⊨ At(λx(F(x)). Fra (2) følger ved hjelp av valuasjonsregelen for At : (3) Ref;<M,w>(λx(F(x)))êΦ(At)(w). Dette impliserer:

(4) Ref;<M,w>(λx(F(x))) êA(μ;0, I). Videre må vi ha i kraft av valuasjonsregelen for λ-abstrakter at det finnes f slik at (5) λ/wêI/((Mg(d(i): <M,w> ⊨ F;x[i]) =f & (6) Ref;<M,w>(λx(F(x))) =f. Det følger at (7) fêA(μ;0, I). Fra (6) og (7) har vi ved hjelp av definisjonen av Φ og valuasjonsregelen for = at følgende holder:

<d;-1(f) ,Ref;<M,w>(λx(F(x)))>êΦ(=)(w) og derfor <M,w> ⊨ d;-1(f) = λx(F(x)). Dette impliserer <M,w> ⊨ (Ey)(y= λx(F(x))). Men w var vilkårlig element i I slik at (2). Det følger at (+) holder og derfor at TA17 er gyldig i standardmodellen for L;a.

Ad TA18: Det er nødvendig å vise at: M ⊨ At(z) → At(λx(xεz & F(x))). Anta i er et vilkårlig navn i L;a+ og at w er en vilkårlig mulig verden. Anta (1) <M,w> ⊨ At(i). Vi ønsker å vise at (2) <M,w> ⊨ At(λx(xεi & F(x))). Fra (1) følger ved hjelp av valuasjonsregelen for At og definisjonen av Φ: (3) d(i)ê A(μ;0, I). Vi definerer nå en funksjon f ved å sette: (4) f = λ/wêI/(d(i)(w)Ω Mg(d(j): <M,w> ⊨ F;x[j])). Vi må vise at

© 2012 Morten Harboe Rognes

fêA(μ;0,I). Siden μ;0 er et utilgjengelig kardinaltall har vi fra (3) at d(i)êA(γ,I) for noe γ<μ;0. Nå har vi om w'êI for vilkårlig w' at dersom zêf(w') har vi zêd(i)(w') og derfor i lys av Teorem 10.1 zêA(γ,I). Det følger at (Aw')(w'êI → f(w') Inkl A(γ,I)). Da har vi: (Aw')(w'êI → f(w')êPt(A(γ,I))) og derfor fê (Pt(A(γ,I)))^I Inkl A(γ+1). Men γ+1<μ;0, det følger at (5) fêA(μ;0, I). Nå er det lett å vise at

d(i)(w)Ω Mg(d(j): <M,w> ╞ F;x[j]) = Mg(d(j): <M,w> ╞ jεi & F;x[j])

Vi har derfor f= λ/wêI/(Mg(d(j): <M,w> ╞ jεi & F;x[j])). Fra dette, (5) og valuasjonsregelen for λ-abstrakter følger Ref<M,w>;(λx(xεi &F(x))) =f. Fra dette, (5), valuasjonsregelen for At, samt definisjonen av Φ har vi <M,w> ╞ At(λx(xεi &F(x))). Dette viser at (2) holder. Dermed har vi vist at TA18 holder i standardmodellen for L;a.

Ad TA19: Vi skal vise (+) M ╞ At(λx(¬(x=x))). Anta w er et vilkårlig element i I. Da har vi (1) Ref<M,w>(λx(¬(x=x))) = λ/wêI/((Mg(d(i): <M,w> ╞ ¬i=i)) om

(2) λ/wêI/((Mg(d(i): <M,w> ╞ ¬i=i)) ê A(μ0,I)

Nå innser man lett at

(3) (Mg(d(i): <M,w> ╞ ¬i=i)) = Mg(x: <M,w> ╞ ¬(d;-1(x)= d;-1(x)) =ø.

Nå har man ifølge Teorem 10.19 at (4) λ/wêI/(ø)êA(1,I) Inkl A(μ;0, I). Videre har vi fra (3) at λ/wêI/((Mg(d(i): <M,w> ╞ ¬i=i)) = λ/wêI/(ø). Det følger fra dette og (4) at (2) holder. Men da har vi fra (1) og (2) at Ref<M,w>(λx(¬(x=x)))êA(μ;0, I) og derfor

<M,w> ╞ At(λx(¬(x=x))).. Siden w var vilkårlig følger (+). Dette viser at TA19 holder i standardmodellen for L;a.

Ad TA20: TA20 er den egenskapsteoretiske versjonen av parmengdeaksiomet Det er nødvendig å vise at: M ╞ At(z) & At(w) → At(λx(x=z v x=w)). Anta wer et vilkårlig element der (1) wêI og anta i,j er vilkårlige navn i L;a+. Anta

(2) <M,w> ╞ At(i) & At(j). Da har vi ved hjelp av valuasjonsregelen for At og definisjonen av Φ at (3) d(i), d(j)êA(μ;0, I). Definer f ved:

(4) f= {<{d(i),d(j)},w>: wêI}. Siden μ;0 er et utilgjengelig kardinaltall har vi fra (3) at det finnes δ, δ' slik at d(i)êA(δ,I) og d(j)êA(δ',I) Anta δ er det største av δ,δ' da har vi ved hjelp av Teorem 10.3: (5) d(i), d(j)êA(δ,I). Fra dette og (4) følger ved hjelp av Teorem 10.17 at (6) fêA(δ+1,I) og derfor at (7) fêA(μ;0, I). Nå har vi

(8) Ref;<M,w>(λx(x=i v x=j)) = λ/wêI/(Mg(d(k): <M,w> ╞ k=i v k=j))
= λ/wêI/({d(i), d(j)}) =f ê A(μ;0, I)

Fra dette følger: Ref;<M,w>(λx(x=i v x=j)) êΦ(At)(w) og derfor

<M,w> ╞ At(λx(x=i v x=j)). Dette viser at TA20 holder i standardmodellen for L;a

Ad TA21: TA21 er den egenskapsteoretiske versjonen av potensmengdeaksiomet. Vi må vise: (1) M ╞ At(w) → At(λx(At(x) & Nec((Az)(zεx → zεw)))). Anta w er et vilkårlig element der (2) wêI og anta at i er et vilkårlig element i L;a+. Anta (3) <M,w> ╞ At(i). Det vil være tilstrekkelig å vise: (+) <M,w> ╞ At(λx(At(x) & Nec((Az)(zεx → zεi)))).

Fra (3) kan vi slutte at at (4) d(i)êA(μ;0, I). Siden μ;0êK;II følger det at det finnes γ slik at (5) γ <μ;0 & d(i)êA(γ,I). Sett per definisjon:

(6) p0 = λ/wêI/Mg(d(j): <M,w> ╞ At(j) & Nec((Az)(zεj → zεi))

Da har vi (7) Ref;<M,w>(λx(At(x) & Nec((Az)(zεx → zεi)))) = p0

om vi kan vise at (8) p0êA(μ;0, I). Det vil være tilstrekkelig å vise (8) for å vise satsen, for fra (7), (8), valuasjonsregelen for At, samt definisjonen av Φ(At) følger (+).

Vi skal først vise at (9) p0(w) = Pt;a(d(i)).

(a) Inklusjonen mot høyre i (9): Anta for vilkårlig x at (10) xêp0(w). Da har vi ved

© 2012 Morten Harboe Rognes

hjelp av (6) at xêMg(d(j): <M,w> ⊨ At(j) & Nec((Az)(zεj → zεi))). Fra dette følger at det finnes navn j slik at x = d(j) & <M,w> ⊨ At(j) & Nec((Az)(zεj → zεi)). Da følger <M;w> ⊨ At(j) og derfor (11) d(j)êA(μ;0, I). Videre har vi <M,w> ⊨ Nec((Az)(zεj → zεi)) og derfor:

(12) (Aw')(w'êI → (Az)(zêd(j)(w') → zêd(i)(w'))). Siden x=d(j) følger xêA(μ;0, I) & (Aw')(w'êI → (Az)(zêx(w') → zêd(i)(w'))). Herav har vi xêPt;a(d(i)) ved hjelp av Definisjon 10.3.

(b) Inklusjonen mot venstre i (9): Anta for vilkårlig z at zêPt;a(d(i)). Da hra vi ved hjelp av Definisjon 10.3 at (Eβ)(zêA(β,I)) & (Aw)(wêI → z(w) Inkl d(i)(w)). Vi har derfor at det finnes ordinaltall β slik at (13) zêA(β,I)) & (Aw)(wêI → z(w) Inkl d(i)(w)). Da har vi naturligvis at Func(z) og at Dom(z)=I. Siden d(i) êA(μ;0, I) følger at det finnes γ der (14) γ<μ;0 & d(i)êA(γ,I). Da har vi om w'êI for vilkårlig w' at d(i)(w') Inkl A(γ,I) ved hjelp av Teorem 10.1 og derfor ved hjelp av (13) at z(w') Inkl d(i)(w') Inkl A(γ,I). Siden w' var vilkårlig følger det at (Aw')(w'êI → z(w')êPt(A(γ,I)). Det følger at zê(Pt(A(γ,I))^I Inkl A(γ+1,I) Inkl A(μ;0, I). Vi må derfor zêA(μ;0,I). Det finnes derfor et navn j slik at z=d(j). Vi må derfor ha: (15) z=d(j) & d(j)êA(μ;0, I) & (Aw)(wêI → d(j)(w) Inkl d(i)(w)). Men fra dette følger: z=d(j) & <M,w> ⊨ At(j) & Nec((Az)(zεj → zεi)). Men herav har vi

zêMg(d(j): <M,w> ⊨ At(j) & Nec((Az)(zεj → zεi))) = p0(w). Dette viser at inklusjonen mot venstre i (9) holder.

Vi har dermed vist (9). Vi må nå vise at (8) holder. Siden d(i)êA(γ,I) for noe γ<μ0 ifølge (5) har vi ved hjelp av Teorem 10.18 at λ/w'êI/(Pt;a(d(i))) êA(γ,I). Men fra dette følger ved hjelp av (9) og (6): p0 =λ/wêI/(p0(w)) = λ/w'êI/(Pt;a(d(i))) êA(γ,I) Inkl A(μ;0, I). Dette viser at (8) holder. Dermed har vi vist at TA21 er gyldig i standardmodellen.

Ad TA22: Dette er den egenskapsteoretiske versjonen av sumaksiomet. Vi må vise:
(+) M ⊨ At(z) → At(λx((Ew)(xεw & wεz))). Anta wêI & IêN(L;a+) for vilkårlig w og i og anta dessuten at (1) <M,w> ⊨ At(i). Det følger da på samme måte som i tidligere bevis at (2) d(i)êA(μ;0, I). Siden μ;0êK;II impliserer (2) at det finnes γ slik at

(3) d(i)êA(γ,I) & γ <μ;0. Det vil være tilstrekkelig å vise at
(4) <M,w> ⊨ At(λx((Ew)(xεw & wεi))). Dette er ekvivalent med at
(5) Ref;<M,w>(λx((Ew)(xεw & wεi)) êA(μ;0, I). Definer nå u0 ved:

(6) u0 = λ/wêI/(Mg(d(j): <M,w> ⊨ (Ew)(jεw & wεi))). Vi skal nå vise
(7) u0êA(μ;0,I). Det vil være tilstrekkelig å vise dette for å vise (4), for fra (6), (7) og valuasjonsregelen for λ-abstrakter følger (5), og derfor (4). Nå har man for vilkårlig z og w'êI at (8) zêu0(w') ↔ zêMg(d(j): <M,w'> ⊨ (Ew)(jεw & wεi))

↔ (Ej)(z=d(j) & <M,w'> ⊨ (Ew)(jεw & wεi))
↔ (Ej)(z=d(j) & (Ek)(d(j)êd(k)(w') & d(k)êd(i)(w'))
↔ (Ev)(zêv(w') & vêd(i)(w')) ↔ zêU;i(d(i))(w')

Når det gjelder den siste ekvivalensen bør man huske på at U;i er definert ved hjelp av Definisjon 10.5. Fra (8) følger u0(w')=U;i(d(i))(w') og derfor, siden vi har at w' er et vilkårlig element i I , kan vi slutte at (9) u0 = U;i(d(i)).

Fra (3) følger ved hjelp av Teorem 10.15 at U;i(d(i))êA(γ+1,I). Fra dette og (9) følger u0 êA(γ+1,I). Siden γ<μ;0 og μ;0 er et utilgjengelig kardinaltall følger det at (7) holder. Dette viser at TA22 er gyldig i standardmodellen.

Ad TA23: Dette er den egenskapsteoretiske versjonen av uendelighetsaksiomet i MZFC. Anta (1) wêI for vilkårlig w. Det vil da være tilstrekkelig å vise at det finnes et navn i i L;a+ slik at de følgende tre påstander holder:

(2.1) <M,w> ⊨ At(i)

© 2012 Morten Harboe Rognes

(2.2) $\langle M,w\rangle \models \mathrm{Nec}(\lambda x(\neg(x=x))\varepsilon i)$

(2.3) $\langle M,w\rangle \models \mathrm{Nec}((Ay)(y\varepsilon i \,\&\, \mathrm{At}(y) \rightarrow (Ez)(\mathrm{At}(z) \,\&\, z\varepsilon i \,\&\, \mathrm{Nec}((Au)(u\varepsilon z \leftrightarrow u\varepsilon y \vee u=y)))))$

Vi skal benytte Teorem 10.35 i beviset. Definer Ø;I og e ved:

(3.1) $\text{Ø};I = \{\langle w,ø\rangle : w\hat{e}I\}$. Sett videre

(3.2) $e(x)= \{\langle w,\{x\} \cup \{z: z\, E(w)x\rangle : w\hat{e}I\}$.

Definer f induktivt ved:

(3.3) $f(0) = \text{Ø};I \;\&\; f(n+1) = e(f(n))$. og definer W og W+ ved:

(3.4) $W = \{f(n): n\hat{e}\omega\} \;\&\; W+ = \{\langle w, W\rangle : w\hat{e}I\}$

Siden $\mu;0$ er et utilgjengelig kardinaltall har vi naturligvis: (4) $\mathrm{Inacc}(\mu;0)$. Fra (3.1)- (3.4) og (4) følger ved hjelp av Teorem 10.35 at (5) $W+\hat{e}\, A(\mu;0, I)$. Vi har derfor at det finnes i slik at (6) $d(i) =W+$. Vi skal nå vise at (2.1) - (2.3) holder når i er definert på denne måten.

Ad (2.1): Fra (6), (5) og valuasjonsregelen for At følger det umidelbart at $\langle M,w\rangle \models \mathrm{At}(i)$. Dette viser at (2.1) holder.

Ad (2.2): Vi har:

(7) $\langle M,w\rangle \models \mathrm{Nec}(\lambda x(\neg(x=x))\varepsilon i) \leftrightarrow (Aw')(w'\hat{e}I \rightarrow \langle M,w'\rangle \models \lambda x(x\neq x)\varepsilon i)$
$\leftrightarrow (Aw')(w'\hat{e}I \rightarrow \text{Ref};\langle M,w'\rangle(\lambda x(x\neq x))\hat{e}d(i)(w'))$

Nå har man (8) $\text{Ref};\langle M,w'\rangle(\lambda x(x\neq x)) = \lambda/w\hat{e}I/Mg(d(j): \langle M,w\rangle \models d(j)\neq d(j))$
$= \lambda/w\hat{e}I/(ø) = \text{Ø};I$

Nå følger ved hjelp av Teorem 10.35a at $(Aw')(w'\hat{e}I \rightarrow \text{Ø};I\hat{e}W+(w'))$ og derfor i lys av (6) at $(Aw')(w'\hat{e}I \rightarrow \text{Ø};I\ \hat{e}\ d(i)(w'))$. Men fra dette, (7) og (8) følger (2.2).

Ad (2.3): Anta for vilkårlig w', j at (9) $w'\hat{e}I \;\&\; j\hat{e}N(L;a+) \;\&\; \langle M,w'\rangle \models j\varepsilon i \;\&\; \mathrm{At}(j)$ Det følger da at $d(j)\hat{e}d(i)(w') \;\&\; d(j)\hat{e}A(\mu;0, I)$ Fra dette og (3.1) - (3.4) følger ved hjelp av Teorem 10.35a at : (10) $e(d(j))\hat{e}d(i)(w')$. Fra dette følger så ved hjelp av Teorem 10.35b:

(11) $(Ez)(\, z\hat{e}W+(w') \;\&\; (Aw)(w\hat{e}I \rightarrow (Au)(u\ E(w)z \leftrightarrow .\ uE(w)d(j) \vee u=d(j))))$

Fra dette følger at det må finne navn k slik at

(12) $d(k)\hat{e}W+(w') \;\&\; (Aw)(w\hat{e}I \rightarrow (Au)(u\ E(w)d(k) \leftrightarrow .\ uE(w)d(j) \vee u=d(j)))$

Nå er det lett å se at (13) $\langle M,w'\rangle \models \mathrm{At}(k) \;\&k\varepsilon i \leftrightarrow d(k)\hat{e}W+(w') \leftrightarrow d(k)\hat{e}d(i)(w')$ (Jmf (6))

Dessuten er det ikke vanskelig å se at

(14) $\langle M,w'\rangle \models \mathrm{Nec}((Au)(u\varepsilon k \leftrightarrow u\varepsilon i \vee u=y)) \leftrightarrow (Aw)(w\hat{e}I \rightarrow (Au)(u\ E(w)d(k) \leftrightarrow .\ uE(w)d(j) \vee u=d(j)))$

Fra (12), (13) og (14) følger at

$\langle M,w'\rangle \models (Ez)(\mathrm{At}(z) \,\&\, z\varepsilon i \,\&\, \mathrm{Nec}((Au)(u\varepsilon z \leftrightarrow u\varepsilon j \vee u=j)))$. Siden w', j var vilkårlige entiteter slik at (9) har vi:

$\langle M,w\rangle \models \mathrm{Nec}((Ay)(y\varepsilon i \,\&\, \mathrm{At}(y) \rightarrow (Ez)(\mathrm{At}(z) \,\&\, z\varepsilon i \,\&\, \mathrm{Nec}((Au)(u\varepsilon z \leftrightarrow u\varepsilon y \vee u=y)))))$

Dette viser at (2.3) holder. Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for at TA23 er gyldig i standardmodellen for L;a.

Ad TA24: Dette aksiomet er den egenskapsteoretiske versjonen av fundierungsaksiomet, eller regularitetsaksiomet som det også kalles. Vi må vise at:

(+) $M \models \mathrm{At}(x) \,\&(Ey)(y\varepsilon x) \rightarrow (Ez)(z\varepsilon x \,\&\, \neg(Ew)(w\varepsilon z \,\&\, w\varepsilon x))$

Anta w,i er vilkårlige entiteter som er slik at (1) $w\hat{e}I \;\&\; i\hat{e}N(L;a+)$. Anta videre at (2) $\langle M,w\rangle \models \mathrm{At}(i) \,\&\, (Ey)(y\hat{e}i)$. For å vise (+) vil det da være tilstrekkelig å bevise at (3) $\langle M,w\rangle \models (Ez)(z\varepsilon i \,\&\, \neg(Ew)(w\varepsilon z \,\&\, w\varepsilon i))$. Ved hjelp av valuasjonsreglene for At og ε følger fra (2) at det finnes navn j slik at (4) $d(i)\hat{e}A(\mu;0, I) \;\&\; d(j)\hat{e}d(i)(w)$. Dette impliserer i sin tur at (5) $d(i)\hat{e}A(\mu;0,I) \;\&\; (Ex)(x\hat{e}d(i)(w))$. Fra (5) følger ved hjelp av Teorem 10.14:

(6) $(Et)(t\hat{e}\, d(i)(w) \;\&\; \neg(Er)(r\ \hat{e}t(w) \;\&\; r\ \hat{e}d(i)(w)))$

© 2012 Morten Harboe Rognes

Dette impliserer at det finnes t slik at (7) têd(i)(w) &¬(Er)(r êt(w) & r êd(i)(w)).
Siden d(i)êA(μ;0,I) følger det ved hjelp av Teorem 10.1 at têA(μ;0,I). Dette innebærer at det finnes navn k slik at (8) d(k)=t. Fra dette og (7) kan man derfor slutte:

(9) d(k)êd(i)(w) & ¬(Er)(r êd(k)(w) & r êd(i)(w)). Fra dette følger:

(10) <M,w> ⊨ kεi. Nå har man:

(11) <M,w> ⊨ ¬(Ew)(wεk & wεi) ↔ ¬(<M,w> ⊨ (Ew)(wεk & wεi)
↔ ¬(Es)(sêN(L;a+) & <M,w> ⊨ sεk & sêi)
↔ ¬(Es)(sêN(L;a+) & d(s)êd(k)(w) & d(s)êd(i)(w))
↔ ¬(Er)(rêd(k)(w) & d(s)êd(i)(w))

Fra (9), (10) og (11) kan man slutte: <M,w> ⊨ kεi & ¬(Ew)(wεk & wεi). Fra dette følger så ved hjelp av valuasjonsregelen for E at (3) holder. Vi har dermed levert et fullstendig bevis for (+). Det følger at TA24 er gyldig i standardmodellen for L;a

Ad TA25: Dette er den egenskapsteoretiske utgaven av replacementaksiomet, eller substitusjonsaksiomet som man også kan kalle det. Vi må altså vise:

(+) M ⊨ [At(a) & (Ax)(Ay)(F(x,y) → At(x)& At(y)) &
(Ax)(Ay)(Az)(F(z,x) & F(z,y) → x=y)]→
(Eb)(At(b) & (Ax)(xεb ↔ (Ey)(yεa & F(y,x))))

Anta w,i er vilkårlige entiteter der vi har: (1) wêI & iêN(L;a+). Anta videre at

(2.1) <M,w> ⊨ At(i)

(2.2) <M,w> ⊨ (Ax)(Ay)(F(x,y) → At(x)& At(y))

(2.3) <M,w> ⊨ (Ax)(Ay)(Az)(F(z,x) & F(z,y) → x=y)

Det vil da være nok å vise: (++) <M,w> ⊨ (Eb)(At(b) & (Ax)(xεb ↔ (Ey)(yεi & F(y,x))))

Fra (2.1) følger (3) d(i)êa(μ;0, I). La oss definere f0 ved å sette:

(4) f0= [Mg(<x,y>: x,yêA(μ;0,I) & <M,w> ⊨ F(d;-1(x), d;-1(y)))]

Det følger umiddelbart fra definisjonen av f0 at

(5) Dom(f0) Inkl A(μ;0, I) & Rgn(f0) Inkl A(μ;0, I).

Anta videre at <z,x>,<z,y>êf0. Da har man x,y,zêA(μ;0,I) og dessuten at
<M,w> ⊨ F(d;-1(z), d;-1(x)) & F(d;-1(z), d;-1(y)). Fra dette kan man ved hjelp av (2.3) slutte at <M,w> ⊨ d;-1(x) = d;-1(y). Men herav følger x=y. Det følger at vi har f0 er en funksjon, med andre ord at (6) Func(f0). Sett nå per definisjon:

(7) c= Mg(<w',f0"(d(i)(w))>: w'êI)

Siden Inacc(μ;0) & ω<Cd(I) <μ;0 har kan vi fra (1), (3), (5), (6) ,(7) og Teorem 10.31 slutte at (8) cêA(μ;0,I). Videre har vi for alle r

(9) rêc(w) ↔ rêf0"(d(i)(w)) ↔ (Eq)(<q,r>êf0 & qêd(i)(w))

Fra (8) følger at (10) <M,w> ⊨ At(d;-1(c)). Videre følger fra (9) at

(11) <M,w> ⊨ (Ax)(xεd;-1(c) ↔ (Ey)(yεd(i) & F(y,x)). Fra (10) og (11) kan man så slutte at (++) holder. Vi har dermed vist at TA25 er gyldig i standardmodellen.

Ad TA26: Det er nødvendig at M ⊨ Nec((Ex)(Set(x) & (Ay)(yεx ↔ F(y)))) → At(λy(Fy)).
Anta (1) wêI for vilkårlig w og at (2) <M,w> ⊨ Nec((Ex)(Set(x) & (Ay)(yεx ↔ F(y)))). Da har vi (3) (Aw')(w'êI → <M,w'> ⊨ (Ex)(Set(x) & (Ay)(yεx ↔ F(y))). Dette innebærer i sin tur at (4) (Aw')(w'êI → (Ei)(iêN(L;a+)& <M,w'> ⊨ Set(i) & (Ay)(yεi ↔ F(y)))). Sett nå per definisjon (5) q = λ/wêI/(Mg(d(i): <M,w> ⊨ F;y[i])) for vilkårlig wêI.

La oss notere at vi generelt har om j er et navn i L;a+ og w' êI at

<M,w> ⊨ Set(j) ↔ d(j)êA(μ;0,I) & (Ex)((Aw)(wêI → d(j)(w) =x)

I lys av denne iaktagelsen ser man at man fra (4) kan slutte:

(6) (Aw')[w'êI → (Ev)(vêA(μ;0,I) & (Ep)((Aw)(wêI → v(w)=p) &

© 2012 Morten Harboe Rognes

(Ar)(rêv(w') ↔ rêq(w'))]

Anta for vilkårlig w' at (7) w'êI. Da har vi ved hjelp av (6) at det finnes v slik at

(8) vêA(μ;0,I) & (Ep)((Aw)(wêI → v(w)=p) & (Ar)(rêv(w') ↔ rêq(w'))

Fra den andre konjunkten her følger at det finnes p slik at (9) (Aw)(wêI → v(w)=p). Det følger at (10) v(w')=p i lys av (7). Siden μ;0 er et utilgjengelig kardinaltall har vi at μ;0êK;II. Det følger derfor fra (8) at det finnes γ slik at (11) vêA(γ,I) & γ<μ;0. Anta nå for vilkårlig r at rêq(w'). Da har vi i lys av den tredje konjunkten i (8) at rêv(w'). Fra dette og (11) kan vi ved hjelp av Teorem 10.1 rêA(γ,I). Siden r var vilkårlig element i q(w') følger at q(w') Inkl A(γ,I). Herav har vi q(w')êPt(A(γ,I)). Men siden w' var vilkårlig entitet slik at (7) har vi (12) (Aw')(w'êI → q(w')êPt(A(γ,I))). Fra dette følger qêPt(A(γ,I))^I Inkl A(γ+1,I). Men A(γ+1,I) Inkl A(μ;0,I). Det følger altså at (13) qêA(μ;0,I). Fra (5) og (13) følger ved hjelp av valuasjonsregelen for λ-abstrakter at (14) Ref;<M,w>(λy(F(y)) =q. Fra dette, (13) , valuasjonsregelen for At og definisjonen av Φ har vi <M,w> ⊨ At(λy(F(y)). Dette viser at TA26 er gyldig i standardmodellen.

Ad TA27: Vi skal nå ta for oss utvalgsaksiomet. I det følgende bruker vi "A" som forkortelse for den følgende formel:

"At(x) & (Ey)(yεx)& (Ay)(yεx → (Ez)(zεy)) &
(Az)(Aw)(z,wεx → z=;e w v ¬(Er)(rεz&rεw))"

"B" brukes som forkortelse for:

"((Eu)(At(u) & (Ay)(yεx →
(Ey')(At(y') & y =;e y' & (Ev)(At(v) &(As)(sεu & sεy' ↔ s=v)))"

Selve utvalgsaksiomet er da kondisjonalen: A→B. Det vi ønsker å vise er naturligvis at (+) M ⊨ A→B. Anta nå at w, i er vilkårlige entiteter der (1) wêI & iêN(L;a+). Anta videre at følgende :

(2.1) <M,w> ⊨ At(i) &(Ey)(yεi)
(2.2) <M,w> ⊨ (Ay)(yεi → (Ez)(zεy))
(2.3) <M,w> ⊨ (Az)(Aw)(z,wεi → z=;e w v ¬(Er)(rεz&rεw))

Gitt (1), (2.1) - (2.3) vil det være tilstrekkelig å vise:

(++) <M,w> ⊨ B;x[i].

Fra (2.1) følger: (3) d(i)ê(A(μ;0,I) & d(i)(w)≠ø. Siden μ;0 er et utilgjengelig kardinaltall følger det at det finnes γ slik at (4) d(i)êA(γ,I) & γ < μ;0. Fra (2.2) kan man slutte at

(5) (Ay)(yêd(i)(w) → (Ez)(zêy(w)). Videre kan man fra (2.3) slutte :
(6) (Az)(Ay)(zêd(i)(w) & yêd(i)(w) & ¬(z=;w y) → ¬(Er)(rêz(w) & rêy(w))

Fra (3) - (6) følger ved hjelp av Teorem 10.36 at det finnes u slik

(7) uêA(γ,I) & (Az)(zE(w)d(i) →
(Ep)(z =;w p & pêA(γ,I) & (Eq)((Av)(vE(w)u & vE(w)p. ↔ v=q)))))

Siden uêA(γ,I) har vi uêA(μ;0,I) og derfor at det finnes et navn k slik at d(k)=u. Vi har derfor: (8) <M,w> ⊨ At(k). Anta nå at j er et vilkårlig navn i L;a+. og anta (9) <M,w> ⊨ jêi Da må det finnes z slik at zêA(μ;0,I) & z=d(j) & zêd(i)(w). da har vi z E(w) d(i) og derfor ved hjelp av (7) at det finnes p,q slik at

(10) z =;w p & pêA(γ,I) & (Av)(v E(w)u & vE(w) p ↔ v=q)

Fra den siste konjunkten i (10) følger: qE(w) p og derfor i lys av den andre konjunkten i (10) at (11) qêA(γ,I). Det må derfor finnes navn h,l slik at (12) p=d(h) & q= d(l)
Fra (10) kan vi derfor slutte:

(13) <M,w> ⊨ At(h) & j=;e h & At(l) & &(As)(sεk & sεh ↔ s=l)

Dette i sin tur impliserer:

(14) <M,w> ⊨ (Ey')(At(y') & j =;e y' & (Ev)(At(v) &(As)(sεk & sεy' ↔ s=v)))

© 2012 Morten Harboe Rognes

La oss forkorte uttrykket som starter med eksistenskvantoren i (14) med G(j,k).
Da har vi <M,w> ⊨ G(j,k). Men j var vilkårlig navn slik at (9). Vi har derfor:
<M,w> ⊨ (Ay)(yεi → G(y,k)). Men sammen med (8) har vi i så fall:
<M,w> ⊨ (Eu)(At(u) & (Ay)(yêi → G(y,k)). Men dette innebærer at <M,w> ⊨ B;x[i]. Dette viser at (++) holder. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for at TA27 er gyldig i standardmodellen for L;a.

Ad TA28: Vi må vise: M ⊨ At(x) & (Ey)Pos(yεx) →
(Ez)(Pos(zεx) & Nec(¬(Ew)(Pos(wεz) & Pos(wεx))))
Anta (1) wêI & iêN(L;a+) for vilkårlig w,i. Anta (2) <M,w> ⊨ At (i)& (Ey)(Pos(yεi)).
Det følger da at (3) d(i)êA(μ;0,I) & (Ey)(y e+ d(i)). Fra dette følger ved hjelp av Teorem 10.37 (4) (Ez)(ze+ d(i) & ¬(Ev)(v e+ z & ve+ d(i))). Nå har man, noe man lett kan verifisere, om j,k er vilkårlige navn i L;a+ at (5) <M,w> ⊨ Pos(jεk) ↔ d(j)e+ d(k). Fra (4) følger eksistensen av z slik at (6) ze+ d(i) & ¬(Ev)(v e+ z & ve+ d(i)). Siden ze+d(i) har vi zêA(μ;0,I) og derfor at (7) <M,w> ⊨ Pos(d;-1(z)εi). Fra den andre konjunkten i (6) følger om w' er et vilkårlig element i I at <M,w'> ⊨ ¬(Ew)(Pos(wεd;-1(z)) & Pos(wεi)). Men da (8) <M,w> ⊨ Nec(¬(Ew)(Pos(wεd;-1(z)) & Pos(wεi))). Men fra dette og (7) kan vi slutte:
<M,w> ⊨ (Ez)(Pos(zεx) & Nec(¬(Ew)(Pos(wεz) & Pos(wεx))))
Dette viser at TA28 holder i standardmodellen.

Ad TA29: Vi skal vise: M ⊨ At(x) → At(λy(Pos(yεx))). Anta (1) wêI & iêN(L;a+) for vilkårlig w,i. Anta videre: (2) <M,w> ⊨ At(i). Da har vi(3) d(i)êAμ;0,I). Sett per definisjon: (4) c(x)= {<w, {z: ze+x}>: wêI}. Da har vi ved hjelp av Teorem 10.38 at (5) c(d(i))êA(μ;0,I). Fra (4) følger:
(6) rêc(d(i))(w) ↔ r e+ d(i)) Er rêc(d(i))(w) er åpenbart rêA(μ;0,I)
Fra dette og (6) kan man slutte at
(7) c(d(i))(w) = Mg(d(j): <M,w> ⊨ Pos(jεi)))
Det følger at (8) c(d(i)) = λ/wêI/(Mg(d(j): <M,w> ⊨ Pos(jεi))))
Men fra dette og (5) følger ved hjelp av definsjonen av Φ og valuasjonsreglene for At og λ-abstrakter at <M,w> ⊨ At(λy(Pos(yεi)))). Dette viser at TA29 holder i standardmodellen.

Ad TA30: Det er nødvendig å vise: M ⊨ At(x) → At(λy((Ez)(Pos(yεz) & Pos(zεx))))
Anta (1) wêI & iêN(L;a+) for vilkårlig w,i. Anta videre: (2) <M,w> ⊨ At(i). Da har vi (3) d(i)êAμ;0,I). Sett per definisjon: (4) c(x)= {<w, {z: (Ev)(ze+v & ve+x)}>: wêI}. Da har vi fra (3), ved hjelp av Teorem 10.39, (5) c(d(i))êA(μ;0,I). Fra (4) følger:
(6) rêc(d(i))(w) ↔ (Ev)(re+v & v e+ d(i)) Er rêc(d(i))(w) er åpenbart rêA(μ;0,I)
Fra dette og (6) kan man slutte at
(7) c(d(i))(w) = Mg(d(j): <M,w> ⊨ (Ez)(Pos(jεz) & Pos(zεi)))
Det følger at (8) c(d(i)) = λ/wêI/(Mg(d(j): <M,w> ⊨ (Ez)(Pos(jεz) & Pos(zεi))))
Men fra dette og (5) følger ved hjelp av definsjonen av Φ og valuasjonsreglene for At og λ-abstrakter at <M,w> ⊨ At(λy((Ez)(Pos(yεz) & Pos(zεi)))). Dette viser at TA30 holder i standardmodellen M

Vi har nå vist at alle aksiomene i MZFC er gyldige i standardmodellen for L;a. Siden slutningsreglene åpenbart bevarer gyldighet kan vi konkludere med at alle teoremene i MZFC er gyldige i denne modellen. Dette avslutter vårt bevis for Teorem 11.1. **QED**.

© 2012 Morten Harboe Rognes

§12 Utsagn og egenskaper

Et utsagn, eller det vi kaller et presist deskriptivt utsagn, er en entitet som deler mengden av mulige verdener inn i to disjunkte mengder, nemlig på den ene side mengden av alle de verdener der utsagnet er sant, og på den annen side mengden av alle de verdener der utsagnet er usant.

Vi skal i denne paragrafen se litt nærmere på spørsmålet om det er mulig å definere de grunnleggende predikatene i den utsagnsteorien vi har utarbeidet tidligere innenfor rammen av MZFC. Det dreier seg om predikatene "x er et utsagn", "x er en verden hvor utsagnet y er sant" og "x er en mulig verden".

La oss først bemerke at vi forkorter uttrykket "x er et utsagn" med "Ut(x)". Utrykkene " x er en mulig verden" og "x er en mulig verden der utsagnet y er sant" vil vi forkorte med henholdsvis "MV(x)" og "x ⊨ y".

Egenskaper er, som vi har vist tidliger, relatert til begrepet om mulige verdener. Er e en eller annen egenskap og w en eller annen mulig verden, er det naturlig å snakke om mengden av alle de entiteter som har egenskapen e. Vi kaller denne mengden av entiteter for ekstensjonen til e i verdenen w.

Om man sammenligner utsagn og egenskaper er det naturlig å betrakte visse spesielle egenskaper. La oss betrakte de egenskaper e som oppfyller det følgende krav: I enhver verden w er ekstensjonen til e enten enhetsmengden som inneholder 0 eller enhetsmengden som inneholder 1.[28] Er e en slik egenskap, og er w en mulig verden er det enten 0 som har egenskapen i verdenen w og som er den eneste enteniteten som har egenskapen, eller så er det 1 som er den eneste entiteten som har egenskapen e i verdenen w. La oss kalle den typen egenskaper som vi her har avgrenset for karakteristiske egenskaper. Er e en slik egenskap vil den dele mengden av mulige verdener inn i to disjunkte mengder, nemlig på den ene side mengden av alle de verdener der 0 har egenskapen e og på den annen side mengden av alle de verdener der 1 har egenskapen w. Vi betegner akkurat her mengden av alle de verdener der 1 har egenskapen e med X(e). Er da I mengden av alle mulige verdener ser man lett at I - X(e) er mengden av alle de verdener der 0 har egenskapen e. Mengden av alle de verdener der et utsagn u er sant kaller vi sannhetsmengden til utsagnet. Man ser altså at enhver karakteritisk egenskaper e definerer entydig et utsagn u(e), nemlig det utsagnet hvis sannhetsmengde er X(e). Omvendt har man, om u er et utsagn at det finnes en entydig bestemt karakteristisk egenskap e der X(e) er sannhetsmengden til u.

Disse betraktningene gjør det rimelig å definere predikatet "Ut(x)", som leses "x er et utsagn", innenfor rammen av L;a på den følgende måte:

Definisjon 12.1

(i) $Ut(x) \leftrightarrow At(x) \,\&\, Nec((Ay)(y\varepsilon x \leftrightarrow y=0) \vee (Ay)(y\varepsilon x \leftrightarrow y=\{ø\}))$

(ii) $U = \{x: Ut(x)\}$

La oss bemerke i forbindelse med denne definisjonen at den andre konjunkten i høyre side av denne definisjonen nettopp uttrykker at ekstensjonen til egenskapen x enten inneholder utelukkende 0 eller innholder utelukkende 1 i enhver verden.

Ifølge Definisjon 12.1 er altså ethvert utsagn et spesielt attributt, nemlig det vi rett

28 Man erindrer i denne forbindelse at vi bruker von Neumanns versjon av ordinaltallene. Det følger at 0=ø og at 1 er identisk med {ø}. Enhetsmengden som inneholder 0 er derfor {ø} og enhetsmengden som inneholder 1 er følgelig {{ø}}. Ekstensjonen til e i verdenen w er følgelig enten {ø} eller {{ø}}.

© 2012 Morten Harboe Rognes

ovenfor kalte for et karakteristisk attributt. Vi identifiserer altså mengden av utsagn med en viss begrenset delmengde av mengden av egenskaper. Dette kan virke kunstig, men er naturligvis ikke galt siden ethvert utsagn i henhold til denne definisjon er en-entydig korrelert med en bestemt mengde med mulige verdener som i sin tur er en-entydig korrelert med en bestemt karakterisk egenskap.

I lys av den definisjonen vi har gitt ovenfor er det naturlig å definere sannhet og usannhet ved utsagn på den følgende måte:

Definisjon 12.2

(i) $\text{Sann}(x) \leftrightarrow \text{Ut}(x) \,\&\, 1\varepsilon x$

(ii) $\text{Usann}(x) \leftrightarrow \text{Ut}(x) \,\&\, 0\varepsilon x$

Uttrykket "Sann(x)" i denne definisjonen leses "x er et sant utsagn" og uttrykket "Usann(x)" leses naturligvis "x er et usant utsagn". Det følgende teorem gir en oversikt over endel av de mest grunnleggende egenskapene ved utsagn, sannhet og usannhet:

Teorem 12.1

(i) $\text{Nec}(\text{Ut}(x)) \vee \text{Nec}(\neg\text{Ut}(x))$

(ii) $\text{Ut}(x) \rightarrow \text{Nec}(0\varepsilon x \vee 1\varepsilon x)$

(iii) $\text{Ut}(x) \rightarrow \text{Nec}(\neg(0\varepsilon x \,\&\, 1\varepsilon x))$

(iv) $\text{Ut}(x) \rightarrow \text{Nec}(\text{Sann}(x) \vee \text{Usann}(x))$

(v) $\text{Ut}(x)\ \text{Nec}(\neg(\text{Sann}(x) \,\&\, \text{Usann}(x))$

Det skulle være klart hva dette teoremet sier. Det første punktet innebærer at formelen "Ut(x)" er L-bestemt. Dette innebærer at dersom x er et utsagn er x et utsagn i alle verdener, og er x en entitet som ikke er et utsagn kan x ikke være noe utsagn i noen verden. De to neste punktene innebærer at dersom x er et utsagn er x nødvendigvis enten sann eller usann, videre at et utsagn ikke kan være både sant og usant. De to siste punktene gjentar bare innholdet i de to foregående på en annen måte.

Når det gjelder utsagn er det naturlig å definere de vanlige operasjonene som man kjenner fra utsagnslogikken og Boolsk algebra. Før vi innfører disse begrepene finner vi det imidlertid hensiktsmessig å innf øre bestemte beskrivelsestermer, det vil si uttrykk av typen "(ix)α" som leses "det objektet x som er slik at α". En slik term kan enten forekomme til høyre eller venstre for tegnene ε og =, eller den kan forekomme for "x" i en formel av typen "At(x)". Vi innfører derfor beskrivelsestermer kontekstuelt og forklarer hvordan de kan fjernes når de forekommer i de fem typene av kontekster som vi har nevnt. Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 12.3

(i) $t\varepsilon(ix)\alpha \leftrightarrow (Ez)(t\varepsilon z \,\&\, (Ax)(\alpha \leftrightarrow x=z))$

(ii) $(ix)\alpha\varepsilon t \leftrightarrow (Ez)(z\varepsilon t \,\&\, (Ax)(\alpha \leftrightarrow x=z)$

(iii) $t= (ix)\alpha \leftrightarrow (Ez)(t=z \,\&\, (Ax)(\alpha \leftrightarrow x=z)$

(iv) $(ix)\alpha = t \leftrightarrow (Ez)(z=t \,\&\, (Ax)(\alpha \leftrightarrow x=z)$

(v) $\text{At}((ix)\alpha) \leftrightarrow (Ez)(\text{At}(z) \,\&\, (Ax)(\alpha \leftrightarrow x=z))$

La oss nå definere de boolske operasjonen på utsagn. "SNu(x)" betyr konjunksjonen av alle utsagnene som har egenskapen x. Tilsvarende betyr "UNu(x)" unionen av alle de utsagnene som har egenskapen x. "K(x,y)" betyr konjunksjonen av utsagnet x og utsagnet y, "D(x,y)" betyr disjunksjonen av utsagnet x og utsagnet y. Endelig betyr "Neg(x)" negasjonen

© 2012 Morten Harboe Rognes

av utsagnet x. Disse begrepene innføres ved den følgende definisjon:

Definisjon 12.4

(i) $Neg(x) = (iy)(Ut(y) \& Nec((Sann(y) \leftrightarrow \neg Sann(x)))$
(ii) $SNu(x) = (iy)(Ut(y) \& Nec((Ay)(Sann(y) \leftrightarrow (Az)(z\varepsilon x \rightarrow Sann(z)))))$
(iii) $UNu(x) = (iy)(Ut(y) \& Nec((Ay)(Sann(y) \leftrightarrow (Ez)(z\varepsilon x \& Sann(z)))))$
(iv) $K(x,y) = SNu(\{x,y\})$
(v) $D(x,y) = UNu(\{x,y\})$

Det følgende teorem viser noen viktige, men trivielle egenskaper til disse operasjonen på utsagn:

Teorem 12.2

(i) $Ut(x) \rightarrow Ut(Neg(x))$
(ii) $x,y\varepsilon U \rightarrow. Ut(D(x,y)) \& Ut(K(x,y))$
(iii) α Inkl $U \rightarrow Ut(SNu(\alpha)) \& Ut(UNu(\alpha))$
(iv) $Ut(x) \rightarrow Sann(Neg(x)) \leftrightarrow Usann(x)$
(v) α Inkl $U \rightarrow Sann(SNu(\alpha)) \leftrightarrow (Az)(z\varepsilon\alpha \rightarrow Sann(z))$
(vi) α Inkl $U \rightarrow Sann(UNu(\alpha)) \leftrightarrow (Ez)(z\varepsilon\alpha \& Sann(z))$
(vii) $x,y\varepsilon U \rightarrow. Sann(K(x,y)) \leftrightarrow Sann(x) \& Sann(y)$
(viii) $x,y\varepsilon U \rightarrow. Sann(D(x,y)) \leftrightarrow Sann(x) \vee Sann(y)$
(ix) $Sann(SNu(\{x: Sann(x)\}))$
(x) $Sann(UNu(\{x:Sann(x)\}))$
(xi) $Ut(x) \rightarrow Sann(D(x,Neg(x)))$
(xii) $Ut(x) \rightarrow Usann(K(x,Neg(x)))$

Er x og y utsagn sier vi at x logisk impliserer y hvis og bare hvis $Nec(1\varepsilon x \rightarrow 1\varepsilon y))$. I sin tur innebære dette, noe det ikke skulle være så vanskelig å innse, at dersom x impliserer y og x er et sant utsagn så er også y et sannt utsagn. Vi bruker uttrykket " x Imp y" for x impliserer y. og gir den følgende definisjon:

Definisjon 12.5 $x \text{ Imp } y \leftrightarrow. Ut(x) \& Ut(y) \& Nec(Sann(x) \rightarrow Sann(y))$

Det følgende teorem oppsummerer endel trivielle egenskaper ved denne implikasjonsrelasjonen:

Teorem 12.3

(i) $x,y\hat{e}U \rightarrow (x=y \leftrightarrow (x \text{ Imp } y \& y \text{ Imp } x))$
(ii) $Ut(x) \rightarrow x \text{ Imp } x$
(iii) $x \text{ Imp } y \& y \text{ Imp } z \rightarrow x \text{ Imp } z$
(iv) α Inkl $U \rightarrow x\varepsilon\alpha \rightarrow SNu(\alpha) \text{ Imp } x$
(v) α Inkl $U \rightarrow x\varepsilon\alpha \rightarrow x \text{ Imp } UNu(\alpha)$
(vi) $Nec(x \text{ Imp } y) \vee Nec(\neg(x \text{ Imp } y))$

Et konsistent utsagn er et utsagn som er sant i en eller annen mulig verden. Med andre ord er et konsistent utsagn et utsagn som det er logisk mulig at er sant. Bruker vi "Cons(x)" som forkortelse for "x er et konsistent utsagn" kan følgelig dette predikatet defineres på

© 2012 Morten Harboe Rognes

følgende måte innenfor rammen av L;a:

Definisjon 12.6 Cons(x) ↔. Ut(x) & Pos(Sann(x))

Den følgende sats viser noen elementære egenskaper til denne konsistensegenskapen:

Teorem 12.4

(i) Cons(x) & x Imp y → Cons(y)
(ii) xεU → Cons(D(x,Neg(x))
(iii) xεU → ¬Con(K(x,Neg(x)))
(iv) Ut(x) →. ¬Cons(Neg(x)) ↔ Nec(Sann(x))

Med et *maksimalt konsistent utsagn* x forstår vi et konsistent utsagn x som er slik at ethvert konsistent utsagn y som impliserer x er identisk med x. Bruker vi "Max;k(x)" som forkortelse for "x er et maksimalt konsistent utsagn" kan definisjonen formuleres slik:

Definisjon 12.7 Max;k(x) ↔. Cons(x) & (Ay)(Cons(y) & y Imp x → y=x)

Det skulle ikke være så vanskelig å se at ethvert maksimalt konsistent utsagn er et utsagn som er sant i nøyaktig en og bare en mulig verden. Det må av denne grunn finnes en en-entydig korrespondanse mellom maksimalt konsistente utsagn og mulige verdener. Dette gjør det naturlig, innenfor rammen av L;a å definere mengden av mulige verdener, - vi betegner den med W -, som mengden av alle maksimalt konsistente utsagn. W kan altså defineres på den følgende måte:

Definisjon 12.8 W = {x: Max;k(x)}

Det gjenstår å fiksere ytterligere noen begreper. Vi vil først definere hva som menes med at w er en verden hvor utsagnet x er sant, i symboler w ⊨x. Gitt denne definisjonen av logisk mulig verdener som maksimalt konsistent utsagn vil det være naturlig å si at utsagnet x er sant i verdenen w hvis og bare hvis w impliserer x, med andre ord hvis og bare hvis w Inkl x. Vi setter derfor:

Definisjon 12.9 w ⊨x ↔. wεW & Ut(x) & w Imp x

Vi har nå innført utsagnsbegrepet i MZFC og definert en rekke begreper i forbindelse med utsagn.

TA31 Cd(W) >= Aleph;0[29]

Det bør noteres at vi ikke uten videre kan vise at TA31 er noe teorem i MZFC. Det er i og for seg ikke vanskelig å spesifisere modeller for MZFC der man kan vise at TA31 er gal, men alle

29 I Rognes [2] innfører vi predikatet "MV(x)" som leses "x er en mulig verden". Dette svarer til "Max;k(x)" i den fremstillingen vi gir ovenfor. Kardinalitetsaksiomet er formulert slik i Rognes [2]:
(1) (Ex)(M(x) & (Ay)(yêx ↔ MV(y)) & Cd(x) >=Aleph;0). Her leses "M(x)" som "x er en mengde". Hvis denne formelen "oversettes" til språket L;a får vi
(2) (Ex)(Set(x) & (Ay)(yεx ↔ Max;k(y)) & Cd(x)>=Aleph;0) Siden
Set(x) & (Ay)(yεx ↔ Max;k(x)) er ekvivalent med x=W følger det at (2) er ekvivalent med TA31.

© 2012 Morten Harboe Rognes

teoremene i MZFC sanne. Forutsetter man i standardmodellen at I inneholder bare ett element ser man lett at alle MZFC-aksiomene holder og at slutningsreglene fremdeles er gyldige. Men TA31 vil åpenbart ikke holde. Videre vil det, om man forutsetter at I inneholder bare ett element, være slik at de modale distinksjonene faller sammen, med andre ord har vi at formelen $\alpha \leftrightarrow Nec(\alpha)$ er gyldig. Legger man denne formelen, med andre ord $\alpha \leftrightarrow Nec(\alpha)$ til MZFC som et nytt aksiomskjema får man i det vesentlige et system som er ekvivalent med ZFC. Man kan videre vise at man under disse omstendigheter har at ethvert attributt er er en mengde og omvendt. I MZFC utvidet på denne måten har man altså at det følgende vil være et teorem $(Ax)(At(x) \leftrightarrow Set(x))$. Dette innebærer naturligvis at poenget med systemet MZFC faller bort. Antar man derimot at I er minst tellbart uendelig skulle det ikke være noen spesielle problemer forbundet med å vise at TA31 er gyldig i standardmodellen.

Fra en intuitiv synsvinkel er det naturligvis absurd å anta at mengden av mulige verdener bare inneholder ett element. Mengden må naturligvis være uendelig og skulle man bry seg med å anslå størrelsen må den naturligvis tilskrives et meget høyt kardinaltall. Fra en metafysisk og filosofisk synsvinkel virker det nytteløst og fåfengt å forsøke å angi et bestemt kardinaltall i denne forbindelse, men uansett hva man mener om størrelsen av denne mengden synes det fullstendig berettiget å anta at den er minst tellbart uendelig.

Legger man til TA31 som et nytt aksiom i MZFC er det rimelig å tro at man kan vise at det kumulative mengdehierarki er strengt inkludert i det kumulative egenskapshierarki. Med andre ord kan man i denne litt sterkere teorien ikke bare bevise Teorem 8.38, men også følgende sterkere påstand:

Teorem 12.5 $(A\alpha)(M(\alpha)\ SInkl\ A;c(\alpha))$

Det er imidlertid en annen påstand som kan uttrykkes i språket til MZFC som også vi også finner at bør omtales. Det dreier seg om den påstand at ethvert konsistent utsagn er implisert av et maksimalt konsistent utsagn. Påstanden kan formaliseres slik:

TA32 $Cons(x) \rightarrow (Ey)(Max;k(y)\ \&\ y\ Imp\ x)$

Det er tre forhold som kan nevnes i forbindelse med denne påstanden.

For det første har vi ikke, i allefall ikke på det nuværende tidspunkt, greid å vise at denne formelen kan utledes i MZFC, og heller ikke om man supplerer MZFC med TA31.

For det andre er det relativt enkelt å se at formelen holder i standardmodellen om man forutsetter at mengden av mulige verdener, I, inneholder minst et element. Inneholder I bare et element finnes det bare to utsagn, nemlig det sanne og det falske, og det første av disse utsagnene vil da måtte regnes som maksimalt konsistent siden vi i dette tilfelle har at de modale distinksjonene opphører. Formelen vil dessuten være gyldig uansett hvor stor man tenker seg at I er, bare man antar at I er en mengde.

For det tredje er TA32 et spesialtilfelle av en mer generell påstand. La oss kalle en egenskap x for konsistent om vi har at $Pos((Ey)(y\varepsilon x))$, med andre ord om det er logisk mulig om en eller annen entitet har egenskapen. La oss kalle en egenskap x maksimalt konsistent hvis og bare hvis den (i) er konsistent, og (ii) er slik at enhver konsistent egenskap y som impliserer x, ie der vi har $Nec((Az)(z\varepsilon x \rightarrow z\varepsilon y))$, er identisk med x. Gitt disse to definisjonene ser man at TA32 følger fra den mer generelle påstand at enhver konsistent egenskap er implisert av en eller annen maksimalt konsistent egenskap. Videre ser man lett at en maksimalt konsistent egenskap er en egenskap som har en tom ekstensjon i alle verdener untatt én og i denne spesielle verdenen innholder ekstensjonen ett og bare ett objekt. Man ser

© 2012 Morten Harboe Rognes

også lett at enhver egenskap er unionen av en mengde med maksimalt konsistente egenskaper i denne forstand.

Både TA31 og TA32 er formler som kan legges til MZFC uten at man får et system som er inkonsistent. TA31 er, som vi har nevnt, klart uavhengig av MZFC. Det er imidlertid, som vi har antydet, forløpig uklart om TA32 er uavhenhgig av MZFC, eventuelt MZFC utvidet med TA31. I alle tilfelle er TA32 gyldig i standardmodellen uansett hva slags kardinaltall man postulerer at I har.

Vi nevner følgende sats om konsistente og maksimalt konsistente mengder. Den kan uledes i MZFC utvidet med de to nevnte aksiomer.

Teorem 12.6

(i) $Cons(x) \leftrightarrow (Ey)(Max;k(y) \,\&\, y \models x)$
(ii) $Nec(Sann(x)) \leftrightarrow (Ay)(Max;k(y) \rightarrow y \models x)$
(iii) $Max;k(x) \,\&\, Max;k(y) \rightarrow .\ x=y \vee \neg Cons(K(x,y))$
(iv) $Max;k(x) \,\&\, y \varepsilon U \rightarrow .\ x \models y \vee x \models Neg(y)$
(v) $x \varepsilon U \rightarrow .\ Nec(Cons(x)) \vee Nec(\neg Cons(x))$
(vi) $Nec(Max;k(x)) \vee Nec(\neg Max;k(x))$
(vii) $Ut(x) \,\&\, Ut(y) \rightarrow (x=y \leftrightarrow (Aw)(w \varepsilon W \rightarrow (w \models x \leftrightarrow w \models y)))$
(viii) $w \models x \rightarrow w \varepsilon W \,\&\, Ut(x)$
(ix) $Set(x) \,\&\, x\ Inkl\ W \rightarrow (Ey)(Ut(y) \,\&\, (Aw)(w \models y \leftrightarrow w \varepsilon x))$

Vi skal ikke gi noe deltajert bevis for denne satsen her.

Man ser at punkt (vii) i denne satsen uttrykker at to utsagn er identiske om de er sanne i nøyaktig de samme verdenene. Denne påstanden er den samme som aksiomet U2 i Rognes [2]. Punkt (viii) i satsen uttrykker at dersom w er en logisk mulig verden hvor utsagnet x er sant så er w en mulig verden og x et utsagn. Dette er ikke akkurat noen oppsiktsvekkende påstand, men svarer til U3 i den nevnte utsagnsteori. Endelig svarer punkt (ix) i teoremet ovenfor til det vi kalte fullstendighetsaksiomet i Rognes [2], og som vi der betegnet med U4. Påstanden sier at det til enhver mengde med mulige verdener finnes et utsagn som er sant i de og bare de verdenene som er elementer i denne mengden.

I lys av Teorem 12.1 skulle det være forholdsvis lett å se at alle de teoremene vi har utledet i forbindelse med utsagnsteorien T;1, - denne ble presentert i Rognes [2] -, kan utledes i MZFC utvidet med TA31 og TA32.

Vi skal avslutte denne paragrafen med noen kommentarer til en termdannende konstruksjon på formler som kan innføres i L;a.

Man kan innføre en operator μ som tilordner enhver formel α en term, $\mu(\alpha)$. Uttrykket "$\mu(\alpha)$" leses "utsagnet at α". Termen "$\mu(\alpha)$" betegner det utsagnet som uttrykkes av α, med andre ord det utsagnet som er sant i nøyaktig de og bare de verdener hvor formelen α er sann. Vi innfører operaoren μ ved den følgende definisjon:

Definisjon 12.7 $\mu(\alpha) = \lambda x((x=0 \,\&\, \neg\alpha) \vee (x=1 \,\&\, \alpha))$

Man ser fra denne definisjonen at $\mu(\alpha)$ er den egenskapen hvor ekstensjonen utelukkende inneholder 0 i alle de verdnene der α er usann og hvor ekstensjonen er 1 i alle de verdnene hvor α er sann. Med andre ord representerer denne egenskapen utsagnet at α.

© 2012 Morten Harboe Rognes

Vi avslutter denne paragrafen med å presentere et teorem som viser noen elementære egenskaper til operatoren μ:

Teorem 12.3

(i) $Ut(\mu(\alpha))$
(i) $Sann(\mu(\alpha)) \leftrightarrow \alpha$
(ii) $Usann(\mu(\alpha)) \leftrightarrow \neg\alpha$
(iii) $Sann(Neg(\mu(\alpha)) \leftrightarrow \neg\alpha$
(iv) $\mu(\alpha)$ Imp $\mu(\beta) \leftrightarrow Nec(\alpha \rightarrow \beta)$
(v) $Nec(\alpha) \leftrightarrow (Aw)(w\varepsilon W \rightarrow w \models \mu(\alpha))$
(vi) $Pos(\alpha) \leftrightarrow (Ew)(w\varepsilon W \,\&\, w \models \mu(\alpha))$

Vi skal heller ikke i forbindelse med denne satsen gi noe bevis, men en interessert leser skulle, hvis vedkommende har fulgt oss så langt, ikke ha store problemer med å presentere detaljene på egenhånd.

§13 Konklusjon

Vi skal i dette avsnittet oppsummere de viktigste resultatene og temaene som har blitt berørt i dette arbeidet.

Vi har i dette skrift innført, definert og utviklet egenskapsteorien MZFC. Vi har hovedsakelig konsentrert oss om denne teorien, men det bør nevnes at vi har skissert visse varianter av den der man tar hensyn til eksistensen av entiteter som er ikke-attributter. Den sistnevnte kategori av entiteter har vi kalt for urindivider. En av disse variantene av MZFC fremkommer ganske enkelt ved å fjerne det aksiomet som sier at alt er attributter. Systemet kalte vi MZFC-. Man kan så legge til forskjellige aksiomer om urindivider til dette svakere systemet. Et meget naturlig aksiom, som virker fullstendig ukontroversielt er formelen

(i) $(Ax)(Ay)(x\varepsilon y \rightarrow At(y))$,

som ikke sier noe annet enn at dersom x er en entitet som er i besittelse av egenskapen y så er y en egenskap. Et annet aksiom som likeledes virker fullstendig rimelig er at det rett og slett finnes urindivider. Dette kan formuleres slik:

(ii) $(Ex)(\neg At(x))$.

Formelen sier ikke noe annet enn at det finnes objekter som ikke er egenskaper. Utvides MZFC- med disse to aksiomene får man en teori som vi betegnet med MZFC;u. Til denne teorien kan man eventuelt legge til sterkere aksiomer.

Ett slikt aksiom, som kan diskuteres, er at egenskapen å være et urindivid eksisterer. Dette innebærer at det vil eksistere en mengde av urindivider med et bestemt kardinaltall, og at det ikke finnes noen urindivider utover dem som er med i denne mengden. Med andre ord vil mengden av urindivider i så fall utgjøre en bestemt totalitet av objekter. Man kan eventuelt legge til tillegsaksiomer som sier noe om kardinaltallet til denne mengden.

Hvis man er av den mening at urindivider eksisterer, men at de ikke utgjør en begrenset totalitet, kan man betrakte for eksempel et aksiom som sier at det for ethver ikke-tom mengde finnes en mengde med urindivider som er likemektig med denne mengden. Gitt en hvilken som helst mengde med urindivider kan man da finne en mer omfattende og større mengde som kunne inneholder denne slags entiteter.

La oss understreke at vi bare har antydet eksistensen av disse alternative teoriene i

© 2012 Morten Harboe Rognes

dette arbeidet. Hovedsaken har vært å utvikle systemet MZFC.

Innenfor rammen av ZFC har vi definert en semantisk teori for MZFC. Vi avgrenset en ren mengdeteoretisk struktur, standardmodellen for L;a og definerte hva det vil si at en formel i L;a er gyldig i denne standardmodellen. For ytterligere å belyse dette begrepet, og modifikasjonene av MZFC som tar hensyn til urindivider, definerte vi også to varianter av standardmodellen for L;a. Den ene var standardmodellen for L;a over β, der β er er et ordinaltall. Den andre typen modell var standardmodellen for L;a over μ;0, der μ;0 er det minste utilgjengelige kardinaltall.

Når det gjelder systemet MZFC viste vi hvordan dette kan intepreteres inn i ZFC. Dette resultat er viktig fordi det viser at systemet MZFC er konsistent relativt til ZFC. Kan man utlede en motsigelse i det sistnevnte system, noe man forhåpentligvis ikke kan, kan man også utlede en motsigelse i det førstnevnte. Det følger fra dette resultat at også det svakere systemet MZFC-, som er kompatibelt med eksistensen av urindivider, også er konsistent relativt til ZFC. Metoden vi brukte kan imidlertid ikke uten videre brukes til å vise at MZFC;u, eller noen av de sterkere systemene som ble antydet ovenfor, er konsistente relativt til ZFC.

Når det gjelder selve systemet MZFC har vi vist hvordan alle de elementære begrepene i mengdelæren som snitt, union, uordnet par, ordnet par, potensmengde, relasjon, funksjon osv. kan innføres i systemet, og hvordan alle de grunnleggende satsene vedrørende disse begrepene kan utledes. Videre har vi vist hvordan begrepet ordinaltall kan innføres og hvordan man kan utvikle teorien om ordinaltall innenfor teoriens ramme. I denne forbindelse har vi også innført teorien om transfinite induksjon og definisjoner ved transfinit rekursjon.

Ved hjelp av teorien om definisjoner ved transfinit rekursjon har vi vist hvordan man innenfor rammen av MZFC kan definere det rene kumulative egnskapshierarki og det rene kumulative mengde hierarki, med andre ord henholdsvis <A;c(α)>/αεOn/ og <M(α)>/αεOn/. På basis av disse definisjonene har vi så gitt bevis for en rekke viktige satser om disse hierarkiene og om hvordan de forholder seg til hverandre.

Siden det rene kumulative mengdehierarki kan defineres innenfor rammen av MZFC er det mulig å spesifisere en intepretasjon av språket til ZFC inn i språket til MZFC. Vi har gjort dette og vist hvordan denne intepretasjonen overfører ethvert aksiom i ZFC til et teorem i MZFC og at den bevarer gyldigheten til slutningsreglene i ZFC. Fra dette følger at ZFC er konsistent relativt til MZFC. Sammen med vårt tidligere resultat innenbærer dette at vi har vist at ZFC er ekvikonsistent med MZFC. Denne intepretasjonen viser også at alle de vanlige satser i den klassiske matematikk, siden de kan utledes i ZFC også kan utledes i MZFC.

Vårt tredje hovedresultat, igjen et resultat av beskjeden karakter, er at alle teoremene i MZFC er gyldige i standardmodellen for L;a. Beviset for denne sats føres innenfor rammen av ZFC utvidet med et aksiom sier at det finnes utilgjengelige kardinaltall. Dette innebærer at vi viser at MZFC er konsistent relativt til ZFC utvidet med dette aksiomet. Selvom man ikke, noe som er velkjent, kan vise konsistensen til den sistnevnte teori er det neppe særlig mange matematikere som er av den overbevisning at teorien er inkonsistent. Resultatet kan derfor, sammen med våre andre resultater, i noen grad styrke ens tiltro til konsistensen av MZFC.

Endelig har vi vist hvordan begrepet mulig verden, begrepet utsagn, begrepet om et utsagn

© 2012 Morten Harboe Rognes

som er sant i en mulig verden, samt en rekke andre kan defineres innenfor rammen av MZFC. Vi har også vist hvordan alle satsene i den teorien om utsagn og teorier som vi har presentert i tidligere arbeider kan utledes om man utvider MZFC med to tilleggsaksiomer som begge er gyldige i standardmodellen for L;a forutsatt at vi antar at mengden av mulige verdener i modellen er minst tellbart uendelig. Det ene av disse tilleggsaksiomene sier at det finnes minst tellbart uendelig mange maksimalt konsistente utsagn. Det andre sier at ethvert konsistent utsagn er implisert av minst ett maksimalt konsistent utsagn.

***

© 2012 Morten Harboe Rognes

Referanser

Takeuti & Zaring [1]	Takeuti G. og Zaring W.M, I*ntroduction to Axiomatic Set Theory,* New York Heidelberg Berlin, Springer-Verlag, 1971
Quine[1]	Quine, Willard van Orman, *Set Theory and Its Logic*, Cambridge, Massachusetts, Belknap press, 1963
Quine [2]	Quine, Willard van Orman, *Methods of Logic*, London, Routledge & Kegan Paul, Second Edition Revised, 1962
Quine [3]	Quine, Willard van Orman, *Mathematical Logic*, New York, Evanston, Harper Torchbook, 1962
Rognes [1]	Rognes, Morten, *En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [2]	Rognes, Morten, *En teori om presise deskriptive utsagn*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [3]	Rognes, Morten, *En del grunnleggende begreper og setninger i teorien om presise deskriptive utsagn*, Maskinskrevet manuskript, 1987
Rognes [4]	Rognes, Morten. *Egenskaper. Del I.* Upublisert manuskript, 1986
Rognes [5]	Rognes, Morten. *Egenskaper. Del II (Bevis for teoremer)* , Upublisert manuskript, 1987
Rognes [6]	Rognes, Morten. *Sudier i semantikk og erkjennelsesteori. Del I* , Upublisert manuskript, 1978

© 2012 Morten Harboe Rognes